

Theoretische Physik E — Quantenmechanik II

V: Prof. Dr. D. Zeppenfeld, Ü: Dr. S. Gieseke

Übungsblatt 3

Abgabe: Fr, 17.11.'06, 9.45 Uhr, Erdgeschoss Physikhochhaus.

Aufgabe 9: Spin- $\frac{1}{2}$ System

[4]

Gegeben sind die Operatoren

$$S_x = \frac{\hbar}{2} (|+\rangle\langle-| + |- \rangle\langle+|), \quad S_y = \frac{i\hbar}{2} (|+\rangle\langle-| - |- \rangle\langle+|), \quad S_z = \frac{\hbar}{2} (|+\rangle\langle+| - |- \rangle\langle-|)$$

bezüglich der Basis $\{|+\rangle, |- \rangle\}$, den Eigenzuständen von S_z .

- Bestimmen Sie die 2×2 Matrix-Darstellungen der S_i in dieser Basis und berechnen Sie die Kommutatoren $[S_i, S_j]$ sowie die Antikommutatoren $\{S_i, S_j\}$.
- Überprüfen Sie mit $A = S_x$ und $B = S_y$ die verallgemeinerte Unschärferelation

$$(\Delta A)^2 (\Delta B)^2 \geq \frac{1}{4} |\langle [A, B] \rangle|^2$$

bezüglich des Zustandes $|+\rangle$.

Aufgabe 10: Bahndrehimpuls

[4]

Ein Teilchen in einem kugelsymmetrischen Potential befinde sich in einem Eigenzustand $|l, m\rangle$ von $\vec{L}^2$ und L_z . Wie lauten die Erwartungswerte $\langle L_x \rangle, \langle L_y \rangle, \langle L_z \rangle, \langle L_x^2 \rangle, \langle L_y^2 \rangle, \langle L_z^2 \rangle$, bezüglich dieses Zustandes? Was bedeutet das semiklassisch?

Aufgabe 11: Drehoperatoren

[6]

Wir betrachten allgemeine Drehungen um die Achse $\vec{\omega}$ mit dem Drehwinkel $\omega = |\vec{\omega}|$,

$$R(\vec{\omega})_{ij} = \frac{\omega_i \omega_j}{\omega^2} + \cos \omega \left(\delta_{ij} - \frac{\omega_i \omega_j}{\omega^2} \right) - \frac{\sin \omega}{\omega} \varepsilon_{ijk} \omega_k.$$

- Zeigen Sie, dass $R(\vec{\omega})R(-\vec{\omega}) = 1$.
- Zeigen Sie, dass sich der Ortsoperator $\vec{r}$ unter einer unitären Transformation

$$U(\vec{\omega}) = e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{\omega} \cdot \vec{L}}, \quad \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

unabhängig von der Darstellung bezüglich seiner Komponenten wie ein Vektor transformiert, also

$$U^\dagger(\vec{\omega}) \vec{r} U(\vec{\omega}) = R(\vec{\omega}) \vec{r}.$$

Verwenden Sie dazu das Baker-Hausdorff Theorem in der allgemeineren Fassung

$$e^B A e^{-B} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A_n, \quad A_n = [B, A_{n-1}], \quad A_0 = A.$$

(b.w.)

Aufgabe 12: Drehimpulse und Oszillatoren**[6]**

Wir untersuchen ein System von zwei unabhängigen harmonischen Oszillatoren (im folgenden durch +, - benannt) mit Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $a_{\pm}^{\dagger}, a_{\pm}$, die die üblichen Vertauschungsrelationen erfüllen. Damit definieren wir die Operatoren

$$J_{\pm} = \hbar a_{\pm}^{\dagger} a_{\mp}, \quad J_z = \frac{\hbar}{2} (a_{+}^{\dagger} a_{+} - a_{-}^{\dagger} a_{-}), \quad N = N_{+} + N_{-} = a_{+}^{\dagger} a_{+} + a_{-}^{\dagger} a_{-}.$$

Zeigen Sie, dass die $J_{\pm}, J_z$ eine Drehimpulsalgebra erfüllen, also

$$[J_z, J_{\pm}] = \pm \hbar J_{\pm}, \quad [\vec{J}^2, J_z] = 0, \quad [J_{+}, J_{-}] = 2\hbar J_z.$$

Zeigen Sie weiterhin, dass

$$\vec{J}^2 = \hbar^2 \frac{N}{2} \left(\frac{N}{2} + 1 \right), \quad (\vec{J}^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2).$$

Damit müsste es also einen Zusammenhang zwischen der Besetzungszahldarstellung $|n_{+}, n_{-}\rangle$ und der Drehimpulsdarstellung $|j, m\rangle$ von Zuständen dieses Systems geben. Wie lautet dieser Zusammenhang und wie lassen sich damit Drehimpulse ganz allgemein deuten?

$\Sigma_{\text{Blatt3}} = 20$