Universität Karlsruhe (TH) **WS 2006/07**

Theoretische Physik E — Quantenmechanik II

V: Prof. Dr. D. Zeppenfeld, Ü: Dr. S. Gieseke

Übungsblatt 4

Abgabe: Fr, 24.11.'06, 9.45 Uhr, Erdgeschoss Physikhochhaus.

Aufgabe 13: Pauli–Matrizen und Drehungen **[5]**

(a) Zeigen Sie, dass jede unitäre Matrix U mit $\det U = +1$ (unimodular) in zwei Dimensionen (also jedes Element der $SU(2)$) in der Form

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \quad |a|^2 + |b|^2 = 1$$

geschrieben werden kann. Darin sind $a, b \in \mathbb{C}$ (Cayley–Klein Parameter).

(b) Eine allgemeine Spin–$\frac{1}{2}$–Drehung kann auch mit Hilfe von Euler–Winkeln als $U(\alpha, \beta, \gamma)$ parametrisiert werden. Wie lautet der Zusammenhang zwischen den Cayley–Klein–Parametern aus Teil (a) und den Euler–Winkeln (mit Rechnung)?

(c) Ebenso lässt sich eine allgemeine Drehung als $U(\vec{\omega}) = \exp(-i\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{\omega}}{2})$ schreiben. Darin beschreiben $\omega = |\vec{\omega}|$ und $\hat{\omega} = \vec{\omega}/\omega$ die Drehachse bzw. den Drehwinkel und σ_i sind die Pauli–Matrizen. Drücken Sie ω und $\hat{\omega}$ durch die Euler–Winkel aus Teil (b) aus. Testen Sie in Ihrem Ergebnis auch, ob $\hat{\omega}^2 = 1$.

Aufgabe 14: $SU(2)$ und $O(3)$ **[5]**

(a) Zeigen Sie, dass jede hermitesche, spurlose 2×2–Matrix P als $P = \vec{p} \cdot \vec{\sigma}$ geschrieben werden kann. Darin sind σ_i die Pauli–Matrizen und $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$.

(b) Solch eine Matrix werde nun mit einer unitären Matrix $U \in SU(2)$ transformiert, $P' = U^{-1}PU$. Zeigen Sie, dass $P' = \vec{p}\,' \cdot \vec{\sigma}$ mit $\vec{p}\,' \in \mathbb{R}^3$ und berechnen Sie $\det P$ sowie $\det P'$. Begründen Sie aus Ihren Ergebnissen, dass sich $\vec{p}$ wie ein dreidimensionaler Vektor unter Drehungen transformiert.

(c) Wenn nun also U für $\vec{p}$ eine "gewöhnliche" Drehung R induziert, also $p_i' = R_{ij}p_j$, dann sollte es einen Zusammenhang zwischen R und U geben. Drücken Sie die Matrixelemente R_{ij} mit Hilfe der Pauli–Matrizen durch U aus. Ist diese Zuordnung eindeutig?

Aufgabe 15: Messprozess im Spin $\frac{1}{2}$–System **[5]**

Ein System sei in einem Eigenzustand von $\vec{S}\cdot\vec{n}$, wobei $\vec{S}=\frac{\hbar\vec{\sigma}}{2}$ wie in Aufgabe 9 definiert sind. Der Einheitsvektor $\vec{n}$ liegt in der xz–Ebene mit einem Winkel γ zur z–Achse. Mit welcher Wahrscheinlichkeit finden Sie das System bei einer Messung im Zustand $|-\rangle$? Wie lautet die Varianz Ihrer Messung, also $\langle(S_z-\langle S_z\rangle)^2\rangle$? Überzeugen Sie sich von Ihrem Ergebnis, indem Sie die Werte $\gamma=0,\pi/2$ einsetzen. Das alles können Sie durch ein einfaches Lösen des Eigenwertproblems von $\vec{S}\cdot\vec{n}$ berechnen. Sie können den Eigenvektor auch (einfacher) mit Hilfe einer Drehung bestimmen. Wie? Überprüfen Sie explizit, ob die Eigenvektoren gleich sind.

Aufgabe 16: Clebsch–Gordan Koeffizienten **[5]**

Ein System sei aus einem Spin–1 und einem Spin–$\frac{1}{2}$ System zusammengesetzt. Wie lauten die Eigenzustände des Gesamtdrehimpulses, $|\,jm\,\rangle$, ausgedrückt als Linearkombinationen der gekoppelten $|\,1m_1\,\rangle\,|\,\frac{1}{2}m_2\,\rangle$–Zustände? Mit anderen Worten: bestimmen Sie die Clebsch–Gordan Koeffizienten für $1\otimes\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\oplus\frac{1}{2}$. Als letzten Zustand werden Sie vermutlich $|\,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\,\rangle$ bestimmen. J_- auf diesen angewandt sollte 0 ergeben. Das ist für die Linearkombination, die Sie erhalten nicht sofort klar. Überprüfen Sie das. (Bei der Gelegenheit lohnt es sich herauszufinden, was Alfred Clebsch mit dem Polytechnikum Karlsruhe zu tun hatte.)

$\sum_{\textbf{Blatt4}} = \textbf{20}$