Theoretische Physik E — Quantenmechanik II

V: Prof. Dr. D. Zeppenfeld, Ü: Dr. S. Gieseke

Übungsblatt 5

Abgabe: Fr, 01.12.'06, 9.45 Uhr, Erdgeschoss Physikhochhaus.

Aufgabe 17: Angela und Franz messen Spins [5]

Angela und Franz messen Spins an einem Singlett–System (S=0) aus zwei Teilchen I und II mit Spin $\frac{1}{2}$ [1]. Dabei können sie nicht miteinander reden, weil sie die Teilchen mit großem räumlichen Abstand voneinander messen. Angela kann nur Teilchen I messen und Franz nur Teilchen II.

(a) Franz misst nicht. Mit welcher Wahrscheinlichkeit misst Angela den Wert $+\hbar/2$ wenn sie verschiedenene Spinkomponenten (z.B. x, z) misst?

(b) Franz misst, und zwar $s_z = +\hbar/2$. Misst Angela nun immer noch dasselbe wie in (a)?

Aufgabe 18: Zwei–Nukleonen–System [5]

Ein System aus zwei Nukleonen mit Spin $\frac{1}{2}$ wird durch die Wechselwirkung

$$V(\vec{r}) = V_1(r) + \frac{1}{\hbar^2} V_2(r)\, \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 + \frac{1}{\hbar^2} V_3(r)\, \vec{L} \cdot \vec{S}$$

beschrieben. Welche Quantenzahlen charakterisieren das System (warum?) und wie muss die Wellenfunktion des Systems zusammengefügt werden? Der Bahndrehimpuls ℓ wird zu den 'guten' Quantenzahlen gehören, da das System rotationssymmetrisch ist. Welche Werte können die weiteren Quantenzahlen für $\ell = 0$ und $\ell = 1$ unter Berücksichtigung des Pauli–Prinzips annehmen? Was können Sie dann über das Spektrum aussagen?

Hinweis: Das Pauli–Prinzip kommt allgemein erst später dran und besagt, dass die Gesamtwellenfunktion von Fermionen antisymmetrisch unter Austausch zweier Teilchen ist. Erinnern Sie sich auch daran, dass Sie die Symmetrie der Bahndrehimpulseigenfunktionen aus der Parität der Kugelflächenfunktionen $Y_m^{\ell}(\vec{n})$ ablesen können.

Aufgabe 19: Wigner–Matrizen [5]

Die Wigner–Matrizen $d^{(j)}_{m'm}(\beta)$ lassen sich für beliebiges j sukzessiv aus den $d^{(\frac{1}{2})}_{m'm}(\beta)$ und den Clebsch–Gordan–Koeffizienten (CGKs) berechnen. Bestimmen Sie so die gesamte Wigner Matrix für $j = 1$ aus der Matrix für $j = 1/2$,

$$d^{\frac{1}{2}}_{m'm}(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\beta}{2} & -\sin\frac{\beta}{2} \\ \sin\frac{\beta}{2} & \cos\frac{\beta}{2} \end{pmatrix}$$

und den dazugehörigen CGKs.

(b.w.)

[1] Ein Zweizustandssystem, z.B. mit den Zuständen $|\, r\,\rangle$ und $|\, l\,\rangle \ldots$

Aufgabe 20: Rho–Mesonen–Zerfälle **[5]**

Eine wichtige Eigenschaft der Elementarteilchen ist der Isospin I, denn er bleibt bei der starken Wechselwirkung erhalten. Isospinoperatoren genügen den Drehimpulsvertauschungsrelationen $[I_i, I_j] = i\epsilon_{ijk} I_k$. Isospinsymmetrie bedeutet schließlich, dass Zustände ganz analog zur Rotationssymmetrie durch kets $|\, I, I_z \,\rangle$ charakterisiert werden. So bilden die Pionen (Pseudoskalare Mesonen) und die Rho–Mesonen (Vektormesonen) jeweils ein Isospintriplett ($I = 1$), wir schreiben

$$|\, \pi^\pm \,\rangle = |\, 1\pm \,\rangle \;, \qquad |\, \pi^0 \,\rangle = |\, 10 \,\rangle \;, \qquad |\, \rho^\pm \,\rangle = |\, 1\pm \,\rangle \;, \qquad |\, \rho^0 \,\rangle = |\, 10 \,\rangle \;,$$

wobei wir weitere Quantenzahlen unterdrückt haben. Untersuchen Sie aufgrund der gegebenen Analogien zum Drehimpuls und zur Drehimpulskopplung, ob die denkbaren (starken) Zerfälle

$$\rho^\pm \to \pi^\pm \pi^0 \;, \qquad \rho^0 \to \pi^\pm \pi^\mp \;, \qquad \rho^0 \to \pi^0 \pi^0$$

vorkommen können. Berechnen Sie dazu die nötigen Clebsch–Gordan–Koeffizienten selbst. Gilt das gleiche für den Zerfall beliebiger schwerer Teilchen aus anderen Isospinmultipletts in Pionenpaare?

$$\overline{\boldsymbol{\Sigma_{\text{Blatt5}} = 20}}$$