Universität Karlsruhe (TH) **WS 2006/07**

Theoretische Physik E — Quantenmechanik II

V: Prof. Dr. D. Zeppenfeld, Ü: Dr. S. Gieseke

Übungsblatt 6

Abgabe: Fr, 08.12.'06, 9.45 Uhr, Erdgeschoss Physikhochhaus.

Aufgabe 21: Drehimpuls als Tensoroperator **[1 + 2 + 2 = 5]**

Wir betrachten den Drehimpulsoperator J_q mit den Komponenten

$$J_{\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(J_x \pm iJ_y) = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} J_{\pm} \,, \qquad J_0 = J_z \,.$$

(a) Zeigen Sie, dass die J_q sphärische Tensoroperatoren vom Rang 1 sind ($T_q^{(1)}$).

(b) Berechnen Sie die reduzierten Matrixelemente $\langle\, \alpha' j' \,||\, J_q \,||\, \alpha j \,\rangle$.
Hinweis: $\langle\, j1; m_1 = j, m_2 = 0 \,|\, j1; j, m = j \,\rangle = \sqrt{j/(j+1)}$.

(c) Berechnen Sie $J'_q = d^{(1)}_{qp} J_p$ mit Hilfe der Wigner–Matrix aus Aufgabe 19. Zeigen Sie, dass Ihr Ergebnis mit der Erwartung für eine Drehung der Komponenten J_x, J_y, J_z um den Winkel β um die y–Achse übereinstimmt.

Aufgabe 22: Spärische Tensoroperatoren **[(0) + (1 + 2 + 2) = 5]**

Wir betrachten zwei Vektoren (Operatoren) $\vec{U} = (U_x, U_y, U_z)$ und $\vec{V} = (V_x, V_y, V_z)$.

(a) Wie lauten sphärische Tensoroperatoren vom Rang 1 (Vektoroperatoren), ausgedrückt durch die Komponenten von nur einem Vektor $\vec{U}$ bzw. $\vec{V}$ (s. auch Aufgabe 21)?

(b) Konstruieren Sie sphärische Tensoroperatoren vom Rang 0, 1 und 2 aus der Kopplung der zwei verschiedenen Vektoren $\vec{U}$ und $\vec{V}$. Schreiben Sie Ihre Ergebnisse in einfacher Form ausgedrückt durch die kartesischen Komponenten von $\vec{U}$ und $\vec{V}$.

Finden Sie einen Zusammenhang zu der üblichen Zerlegung von $U_i V_j$ der Gestalt „Skalar + antisymmetrischer Tensor + symmetrischer Tensor"?

(b.w.)

Aufgabe 23: Sphärische Tensoren und Kugelflächenfunktionen **[2 + 3 = 5]**

(a) Schreiben sie xy, xz und $(x^2 - y^2)$ als Komponenten eines irreduziblen sphärischen Tensoroperators vom Rang 2. *Hinweis:* die Kugelflächenfunktionen Y_ℓ^m sind irreduzible sphärische Tensoroperatoren vom Rang ℓ. Schreiben Sie die in Frage kommenden Y_ℓ^m in kartesischen Koordinaten.

(b) Das Quadrupolmoment lässt sich als der Erwartungswert

$$Q = e\langle\, \alpha, j, m = j \,|\, 3z^2 - r^2 \,|\, \alpha, j, m = j \,\rangle$$

schreiben. Drücken Sie das Matrixelement

$$M = e\langle\, \alpha, j, m' \,|\, x^2 - y^2 \,|\, \alpha, j, m = j \,\rangle$$

(mit $m' = j, j-1, \ldots$) durch Q und geeignete Clebsch–Gordan Koeffizienten aus.

Aufgabe 24: Magnetisches Moment und Projektionstheorem **[3 + 2 = 5]**

Wir untersuchen ein System, in dem der Gesamtdrehimpuls $\vec{J}$ aus zwei Drehimpulsen $\vec{J}_1$ und $\vec{J}_2$ zusammengesetzt ist, $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$. Das gesamte magnetische Moment dieses Systems ist durch $\vec{\mu} = \alpha\vec{J}_1 + \beta\vec{J}_2$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie die Erwartungswerte von μ_x, μ_y, μ_z, wenn sich das System in einem Zustand $|\, j_1 j_2; jm \,\rangle$ befindet.

(b) Das System sei nun ein Elektron mit Spin $s = 1/2 = j_1$, Bahndrehimpuls $\ell = 2 = j_2$ und dem Gesamtdrehimpuls $j = 3/2$. Zum Beispiel ein Atom in einem $^2D_{3/2}$ Zustand. Bestimmen Sie für alle möglichen Werte von $J_z = \hbar m$ den Erwartungswert von μ_z. Beachten Sie: das magnetische Moment des Elektrons enthält den Faktor $g = 2$.

$$\sum\nolimits_{\mathbf{Blatt6}} = \mathbf{20}$$