

# Theoretische Physik E — Quantenmechanik II

V: Prof. Dr. D. Zeppenfeld, Ü: Dr. S. Gieseke

## Übungsblatt 8

Abgabe: Fr, 12.01.'07, 9.45 Uhr, Erdgeschoss Physikhochhaus.

### Aufgabe 28: Harmonischer Oszillator mit externer Kraft

[5]

Ein eindimensionaler harmonischer Oszillator befindet sich für  $t < 0$  im Grundzustand. Für  $t \geq 0$  wirkt eine zeitabhängige, aber räumlich konstante Kraft  $F(t) = F_0 e^{-t/\tau}$ .

- (a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, den Oszillator bei  $t > 0$  im ersten angeregten Zustand zu finden in erster Ordnung der zeitabhängigen Störungsrechnung. Zeigen Sie, dass die gefundene Wahrscheinlichkeit für  $t \rightarrow \infty$  zeitlich unabhängig wird. Ist das sinnvoll?
- (b) Kann sich der Oszillator auch in höher angeregten Zuständen befinden? Warum?

### Aufgabe 29: Tritium–Helium Übergang

[5]

Das Elektron eines Tritium Atoms ( $^3\text{H}$ ) befinde sich im Grundzustand. Durch  $\beta$ -Zerfall erhöht sich die Ladung des Kerns plötzlich auf  $Z = 2$  und wir bekommen ein geladenes  $^3\text{He}$ -Atom. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich das Elektron nach dem Zerfall immer noch im Grundzustand befindet. Die Wellenfunktion des Einelektronatoms lautet

$$\psi_{100} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} e^{-Zr/a_0}.$$

### Aufgabe 30: Harmonischer Oszillator mit Störung

[5]

Ein eindimensionaler harmonischer Oszillator mit Frequenz  $\omega$  bekommt einen Störterm

$$V = \frac{1}{2} \epsilon m \omega^2 x^2.$$

Bestimmen Sie den gestörten Grundzustand in erster und dessen Energieeigenwert in zweiter Ordnung der zeitunabhängigen Störungsrechnung. Sie können das Problem auch exakt lösen. Wie vergleicht sich Ihr Ergebnis für das gestörte Energieniveau mit dem exakten Ergebnis für  $\epsilon \rightarrow 0$ ?

(b.w.)

**Aufgabe 31: Lebensdauer des  $2p$ -Zustandes****[5]**

Bestimmen Sie die Lebensdauer vom  $2p$ -Zustand des Wasserstoffatoms.

*Hinweis:* Zu Weihnachten ein nicht ganz einfaches Problem. Gehen Sie aus vom Ausdruck für die Übergangswahrscheinlichkeit<sup>2</sup>  $w_{i \rightarrow f}$  eines Systems bei der Absorption von elektromagnetischer Strahlung (Anwendung von Fermis goldener Regel),

$$w_{if} = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{e^2}{m_e} |A_0|^2 \left| \langle f | e^{i \frac{\omega}{c} \vec{k} \cdot \vec{x}} \hat{\epsilon}^\alpha \cdot \vec{p} | i \rangle \right|^2 \delta(E_f - E_i - \hbar\omega),$$

wie aus der Vorlesung bekannt (vgl. auch Sakurai Gl. (5.7.8)). Für die spontane Emission (Vorzeichen!) in semiklassischer Näherung setzen Sie  $A_0 = \hbar/2\omega V$ . Darin ist  $V$  das Volumen, in dem Sie Ihre Photonenzustände normieren. Integrieren Sie nun  $w_{if}$  über das Photonenphasenraumvolumen, gewichtet mit der Dichte der Zustände. Dieser Ausdruck kann in der Dipolnäherung vereinfacht werden und Sie erhalten nach Winkelintegration eine Übergangswahrscheinlichkeit, die nicht mehr von der Richtung des emittierten Photons abhängt,

$$w = \alpha \frac{4}{3} \frac{\omega^3}{c^2} |\langle f | \vec{x} | i \rangle|^2.$$

Nun spezifizieren wir das Problem auf das Wasserstoffatom. Wir setzen also  $|i\rangle = |21m\rangle$  und  $|f\rangle = |100\rangle$ . Bestimmen Sie zunächst die Auswahlregeln für Dipolstrahlung mit Hilfe des Wigner-Eckart-Theorems. Letztlich müssen Sie das Matrixelement  $\langle f | \vec{x} | i \rangle$  für die gesuchten  $(2p \rightarrow 1s)$ -Übergänge mit Hilfe der Wasserstoffwellenfunktionen<sup>3</sup> berechnen. Mitteln Sie dabei über die verschiedenen  $|21m\rangle$ . Nach einigen Integrationen erhalten Sie schließlich die gesuchte Lebensdauer bzw. Linienbreite.

---

 $\Sigma_{\text{Blatt8}} = 20$ 


---

<sup>2</sup>Faktoren  $c^2$  auf diesem Blatt korrekt!

<sup>3</sup>aus der Literatur.