

Theoretische Physik E — Quantenmechanik II

V: Prof. Dr. D. Zeppenfeld, Ü: Dr. S. Gieseke

Übungsblatt 10

Abgabe: Fr, 26.01.'07, 9.45 Uhr, Erdgeschoss Physikhochhaus.

Aufgabe 35: Permutationen und Spin

[5]

Ein System zweier Elektronen werde von einem spinunabhängigen Hamiltonoperator H beschrieben.

- (a) Durch welche Eigenzustände wird das System charakterisiert? Zeigen Sie, dass diese Eigenzustände gleichzeitig Eigenzustände des Zweivertauschungsoperators P_{12} mit den Eigenwerten ± 1 sind. Es gilt $P_{12} |a\rangle^{(1)} |b\rangle^{(2)} = |b\rangle^{(1)} |a\rangle^{(2)}$.

- (b) Zeigen Sie, dass P_{12} in der Form

$$P_{12} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{4}{\hbar^2} \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 \right)$$

durch die Spins $\vec{S}_1, \vec{S}_2$ der zwei Elektronen ausgedrückt werden kann.

- (c) Wie muss die Gesamtortswellenfunktion also für die verschiedenen Eigenzustände von P_{12} durch die Wellenfunktionen der Einzelelektronen ausgedrückt werden? Berechnen Sie die Energiekorrektur ΔE durch ein Potential $U(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)$ in erster Ordnung Störungstheorie.

Aufgabe 36: Austauschwechselwirkung im He-Atom

[5]

Berechnen Sie das Austauschintegral (s. Vorlesung)

$$J = \int d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 \psi_{100}(\vec{r}_1) \psi_{nlm}(\vec{r}_2) \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} \psi_{100}^*(\vec{r}_2) \psi_{nlm}^*(\vec{r}_1),$$

das in der Energiekorrektur $\Delta E = I \pm J$ auftaucht, wenn die Wechselwirkung der zwei Elektronen als Störung angenommen wird. Die $\psi_{nlm}(\vec{r})$ sind die bekannten Wasserstoffwellenfunktionen. Die Elektronen befinden sich in einer $(1s)(nl)$ -Konfiguration. Wir beschränken uns in dieser Rechnung auf den Spezialfall $n = 2, l = 1$.

Hinweis: Verwenden Sie die Identitäten

$$\frac{1}{r_{12}} = \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = \frac{1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \gamma}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos \gamma),$$

wobei $(r_{<} = \min(r_1, r_2), r_{>} = \max(r_1, r_2))$, sowie

$$P_l(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_l^{m*}(\Omega_1) Y_l^m(\Omega_2)$$

und die Orthogonalitätsrelationen der Kugelflächenfunktionen.

(b.w.)

Aufgabe 37: Dirac–Teilchen im elektromagnetischen Feld**[5]**

Ein Dirac–Teilchen im elektromagnetischen Feld $(\phi, \vec{A})$ wird durch den Hamiltonoperator

$$H = c\vec{\alpha} \cdot \vec{\pi} + \beta mc^2 + e\phi, \quad \vec{\pi} = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - e\vec{A}$$

beschrieben. Verwenden Sie die Heisenbergschen Bewegungsgleichungen um

- (a) den Geschwindigkeitsoperator $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ zu bestimmen und
- (b) zu zeigen, dass auch auf Operatorniveau die Lorentzkraft $\vec{F} = d\vec{\pi}/dt$ als

$$\vec{F} = e \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right)$$

geschrieben werden kann.

$\Sigma_{\text{Blatt10}} = 15$