

Theoretische Physik E — Quantenmechanik II

V: Prof. Dr. D. Zeppenfeld, Ü: Dr. S. Gieseke

Übungsblatt 11

Abgabe: Fr, 02.02.'07, 9.45 Uhr, Erdgeschoss Physikhochhaus.

Aufgabe 38: Relativistische Korrekturen des Wasserstoffspektrums

[5]

Der Hamiltonoperator des Wasserstoffatoms kann als

$$H = H_0 + H_{LS} + H_r + H_D$$

geschrieben werden. Darin ist $H_0 = \vec{p}^2/2m + V(r)$. Die restlichen Terme werden als Störung zu H_0 betrachtet und lauten

$$H_{LS} = \frac{1}{2m^2c^2} \frac{1}{r} \frac{dV(r)}{dr} \vec{S} \cdot \vec{L},$$

$$H_r = -\frac{1}{2mc^2} \left(\frac{\vec{p}^2}{2m} \right)^2,$$

$$H_D = \frac{\hbar^2}{8m^2c^2} \vec{\nabla}^2 V(r),$$

wobei $V(r) = -e^2/(4\pi\epsilon_0 r)$.

- Zeigen Sie, dass der Gesamtdrehimpuls $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ erhalten ist.
- Zeigen Sie, dass der Darwin-Term nur Korrekturen zu s-Zuständen liefert.
- Bestimmen Sie die Korrektur zum reinen Coulomb-Energieniveau

$$E_n^{(0)} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a_0} \frac{1}{n^2} = -13.6\text{eV} \frac{1}{n^2}$$

durch den Darwin-Term.

Aufgabe 39: Die Korrekturen durch H_{LS} und H_r

[5]

(Fortsetzung von Aufgabe 38)

- Berechnen Sie die Energiekorrekturen durch die beiden verbleibenden Störungen H_{LS} sowie H_r .
- Bestimmen Sie die Summe der drei Störterme und zeigen Sie, dass die Energieniveaus des Wasserstoffatoms als

$$E_{nj}^{(1)} = E_n^{(0)} \left[1 + \frac{\alpha^2}{n} (\delta_{LS} + \delta_r + \delta_D) \right] = E_n^{(0)} \left[1 + \frac{\alpha^2}{n} \left(\frac{1}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4n} \right) \right]$$

geschrieben werden können. Berechnen Sie die Beiträge δ_{LS} , δ_r , δ_D der verschiedenen Störungen und deren Summe für $n \leq 3$ explizit und skizzieren Sie das resultierende Termschema.

(b.w.)

Aufgabe 40: Chirale Darstellung**[5]**

Untersuchen Sie die Gamma-Matrizen γ^μ in der chiralen Darstellung

$$\gamma_\chi^\mu = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -\vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \right)$$

sowie in der Dirac-Darstellung

$$\gamma_D^\mu = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \right).$$

- (a) Zeigen Sie explizit, dass beide Darstellungen der Clifford-Algebra $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ genügen.
 (b) Beide Darstellungen stehen durch eine unitäre Transformation U in Beziehung, also

$$\gamma_D^\mu = U \gamma_\chi^\mu U^\dagger.$$

Bestimmen Sie die (nur bis auf eine Phase eindeutige) 4×4 -Matrix U explizit.

Aufgabe 41: Gamma-Algebra**[5]**

Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften der Gamma-Matrizen,

$$\begin{aligned} \gamma_\mu \gamma^\mu &= 4 \cdot 1_4, \\ \gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma^\mu &= -2\gamma^\alpha, \\ \gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu &= 4g^{\alpha\beta} \cdot 1_4, \\ \text{tr } \gamma^\alpha \gamma^\beta &= 4g^{\alpha\beta} \end{aligned}$$

mit Hilfe der Antikommutator-Relation $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$.

Hinweise zu den Aufgaben 38, 39: Für die Erwartungswerte $\langle r^k \rangle$,

$$\langle r^k \rangle = \int_0^\infty r^2 dr r^k |R_{nl}(r)|^2$$

bezüglich Wasserstoffeigenzuständen $|nlm\rangle$ gelten folgende Beziehungen:

$$\left\langle \frac{1}{r} \right\rangle = \frac{1}{n^2 a_0}, \quad \left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle = \frac{1}{n^3 a_0^2 (l + \frac{1}{2})}$$

sowie die Rekursionsformel für $k > (2l + 1)$

$$\frac{k+1}{n^2} \langle r^k \rangle - (2k+1)a_0 \langle r^{k-1} \rangle + \frac{k}{4} [(2l+1)^2 - k^2] a_0^2 \langle r^{k-2} \rangle = 0.$$

Explizite Radialwellenfunktionen und die Definition der Laguerre-Polynome finden Sie in der Literatur, z.B. im Anhang des Sakurai.