

Theoretische Physik E — Quantenmechanik II

V: Prof. Dr. D. Zeppenfeld, Ü: Dr. S. Gieseke

Übungsblatt 12

Abgabe: Fr, 09.02.'07, 9.45 Uhr, Erdgeschoss Physikhochhaus.

Aufgabe 42: Dirac-Teilchen im kugelsymmetrischen Potential

[5]

Zeigen Sie, dass bei einem Dirac-Teilchen in einem kugelsymmetrischen skalaren Potential der Gesamtdrehimpuls $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ erhalten ist.

Aufgabe 43: Bilineare Kovarianten

[5]

Untersuchen Sie die 16 Γ -Matrizen, die zur Konstruktion bilinearer Kovarianten benutzt werden,

$$\Gamma^S = 1, \quad \Gamma^P = \gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \quad \Gamma_\mu^V = \gamma_\mu, \quad \Gamma_\mu^A = \gamma_\mu\gamma_5, \quad \Gamma_{\mu\nu}^T = \sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu].$$

- (a) Zeigen Sie $(\Gamma^n)^2 = \pm 1$, für beliebiges n .
- (b) Finden Sie zu jedem $\Gamma^n \neq \Gamma^S$ ein antikommutierendes Γ^m .
- (c) Bestimmen Sie die Spur eines jeden Γ^n .
- (d) Zeigen Sie, dass es für beliebige a, b ein $\Gamma^n \neq \Gamma^S$ gibt, so dass gilt

$$\Gamma^a \Gamma^b = \phi \Gamma^n,$$

mit einer Phase ϕ .

- (e) Das legt nahe, dass die Γ^n eine Basis bilden. Zeigen Sie die lineare Unabhängigkeit der Γ^n .

Aufgabe 44: Kleinsches Paradoxon

[5]

Untersuchen Sie ein Elektron in einem stufenförmigen (elektrostatischen) Potential

$$V(\vec{r}) = e\varphi(\vec{r}) = V(z) = \begin{cases} V_0 & z \geq 0 \\ 0 & z < 0. \end{cases}$$

- (a) Finden Sie eine stationäre Lösung ($E \geq mc^2$) der Dirac-Gleichung der Gestalt

$$\psi(\vec{r}) = e^{-iEt/\hbar}[\psi_i(z) + \psi_r(z) + \psi_t(z)],$$

(b.w.)

darin lauten der einlaufende, reflektierte und transmittierte Anteil der Welle

$$\psi_i(z) = ae^{ik_1 z} \sqrt{\frac{E+mc^2}{2mc^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\hbar ck_1}{E+mc^2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (z < 0),$$

$$\psi_r(z) = e^{-ik_1 z} \sum_{r=1}^2 b_r w_r(-\hbar k_1 \hat{z}), \quad (z < 0),$$

$$\psi_t(z) = e^{ik_2 z} \sum_{r=1}^2 d_r w_r(\hbar k_2 \hat{z}), \quad (z > 0).$$

Wir setzen $k_1 > 0$ und die Spinoren $w_{1,2}(p)$ mit $p = (E, 0, 0, p_z)$ lauten

$$w_1(p) = \sqrt{\frac{E+mc^2}{2mc^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{cp_z}{E+mc^2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2(p) = \sqrt{\frac{E+mc^2}{2mc^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{-cp_z}{E+mc^2} \end{pmatrix}.$$

(b) Berechnen Sie den Strom

$$\vec{j} = c\bar{\psi}(\vec{r}, t) \vec{\gamma} \psi(\vec{r}, t)$$

und zerlegen ihn in die Beiträge $\vec{j}_i, \vec{j}_r, \vec{j}_t$, also einen einfallenden, einen reflektierten und einen auslaufenden Strom. Drücken Sie die Verhältnisse j_r/j_i und j_t/j_i durch

$$r = \frac{k_2}{k_1} \frac{E+mc^2}{E-V_0+mc^2}$$

aus.

- (c) Diskutieren Sie die Lösungen aus Teil (a) und (b) für die verschiedenen Situationen $V_0 < E - mc^2$, $E - mc^2 < V_0 < E + mc^2$, $V_0 > E + mc^2$.
- (d) Zeigen Sie, dass der Strom bei $z = 0$ erhalten ist. Was ist trotzdem eigenartig an Ihrem Ergebnis (Kleinsches Paradoxon)?

$\Sigma_{\text{Blatt12}} = 15$