



Institut für Theoretische Physik der Universität Karlsruhe
Prof. Dr. F. R. Klinkhamer, PD Dr. R. Hofmann

Theoretische Physik E im Wintersemester 2007/2008
Übungsblatt 1

Name: _____

Tutorium: _____

Abgabe: Dienstag, 30. Oktober 2007, in Übungsgruppe

Punkte: _____

Aufgabe 1: *Die „alte Quantentheorie“ von Bohr und Sommerfeld*

In der „alten Quantentheorie“ ging man davon aus, dass ein Teilchen den gewöhnlichen klassischen Trajektorien folgt, daß aber nur gewisse Trajektorien erlaubt sind, so daß es zu einer Quantisierung der Energie kommt. Für periodische Systeme lautet die Quantisierungsbedingung für erlaubte Trajektorien

$$S := \oint p \, dq = 2\pi n \hbar \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Das Integral erstreckt sich hierbei über eine volle Periode der Bewegung.



Arnold Sommerfeld
(1868-1951)

- Begründen Sie, daß S die von der Bahn eingeschlossene Fläche im Phasenraum ist.
(1 Punkt)
- Welche möglichen Energiewerte ergeben sich für den eindimensionalen harmonischen Oszillator mit dem Potential $V(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$?
(2 Punkte)
- Betrachten Sie ein Teilchen in der Ebene mit rotationssymmetrischem Potential. Schreiben Sie die Lagrangefunktion in Polarkoordinaten (r, ϕ) auf. Bestimmen Sie den zum Winkel ϕ kanonisch konjugierten Impuls p_ϕ und zeigen Sie, daß dieser konstant ist. Zeigen Sie, daß es sich um den Drehimpuls handelt, indem Sie sich das System dreidimensional, aber auf eine Ebene eingeschränkt vorstellen. Zeigen Sie, daß die Bohr-Sommerfeld-Bedingung für ϕ , p_ϕ zu einer Quantisierung des Drehimpulses führt.
(2 Punkte)

Aufgabe 2: Hamilton-Jacobi-Theorie

- a) Gegeben sei eine zeitunabhängige Hamiltonfunktion $H(p, q)$ für ein eindimensionales mechanisches System. Wir wollen eine Variablentransformation $(p, q) \rightarrow (\tilde{p}, \tilde{q})$ durchführen. Hierbei nehmen wir an, daß es eine *erzeugende Funktion* $F(q, \tilde{q}, t)$ gibt mit

$$p = \frac{\partial F}{\partial q}, \quad \tilde{p} = -\frac{\partial F}{\partial \tilde{q}}.$$

Zeigen Sie unter Verwendung des Prinzips der extremalen Wirkung, daß die Bewegungsgleichungen in den neuen Variablen wieder die Hamiltonsche Form

$$\dot{\tilde{q}} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}}, \quad \dot{\tilde{p}} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}}$$

haben, wobei die neue Hamiltonfunktion $\tilde{H}$ gegeben ist durch

$$\tilde{H} = H + \frac{\partial F}{\partial t}.$$

(1 Punkt)

- b) Wir betrachten nun als Spezialfall den eindimensionalen harmonischen Oszillator mit $H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$. Gesucht ist die erzeugende Funktion $S(q, E, t)$ für eine Variablentransformation $(p, q) \rightarrow (T, E)$ derart, daß die resultierende Hamiltonfunktion $\tilde{H}(T, E)$ verschwindet, d.h. es soll die *Hamilton-Jacobi-Gleichung*

$$H\left(\frac{\partial S}{\partial q}, q\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

gelten. Verwenden Sie für S einen Separationsansatz $S(q, E, t) = W(q, E) - Et$ und bestimmen Sie $W(q, E)$. Das Integral braucht nicht ausgeführt zu werden. (1 Punkt)

- c) Bestimmen Sie aus der Gleichung $T = -\frac{\partial S}{\partial E}$ die Bahnkurve $q(t)$ in Abhängigkeit von den Parametern E, T . (2 Punkte)
- d) Zeigen Sie, daß man $S(q(t), E, t)$ als Wirkung interpretieren kann. (1 Punkt)