



Institut für Theoretische Physik der Universität Karlsruhe
Prof. Dr. F. R. Klinkhamer, PD Dr. R. Hofmann

Theoretische Physik E im Wintersemester 2007/2008
Übungsblatt 2

Name: _____

Tutorium: _____

Abgabe: Dienstag, 6. November 2007, in Übungsgruppe

Punkte: _____

Aufgabe 3: Landau-Niveaus

Die Ankopplung eines freien Teilchens mit Ladung e und Masse m an ein statisches und räumlich konstantes Magnetfeld $\vec{B}$ wird durch die Ersetzung des kanonischen Impulses $\vec{p}$ durch den kinetischen Impuls $m\vec{\dot{x}} = \vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}$ vollzogen, wobei $\vec{A} = -\frac{1}{2}\vec{x} \times \vec{B}$ das Vektorpotenzial ist. Nehmen Sie an, dass $\vec{B}$ in z -Richtung zeige und konstant sei. Auch sei $e = -e_0$, wobei e_0 die Elementarladung ist. Zeigen Sie, dass der Hamiltonoperator die Form

$$H = H_s + \frac{p_3^2}{2m} \equiv \frac{1}{2} \frac{e_0 B}{mc} (\pi_1^2 + \pi_2^2) + \frac{p_3^2}{2m}$$

annimmt, wobei $\pi_i \equiv \frac{m\dot{x}_i}{\sqrt{e_0 B/c}}$ und $B \equiv |\vec{B}|$. Zeigen Sie weiter, dass

$$[\pi_2, \pi_1] = i\hbar$$

und dass demzufolge die Eigenwerte von H_s

$$E_n = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2}\right)$$

sind, wobei $\omega_c \equiv \frac{e_0 B}{mc}$.
(3 Punkte)

Aufgabe 4: Die semiklassische Näherung am Beispiel des harmonischen Oszillators

- a) Die Eigenzustände des Hamiltonoperators sind durch Angabe des Energieeigenwertes vollständig charakterisiert und führen zu einer zeitunabhängigen Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte. Betrachten Sie nun den *klassischen* harmonischen Oszillator unter der Annahme, daß nur die Energie E bekannt sei und der Parameter T aus Aufgabe 2 über eine Periode zufällig gleichverteilt sei, d.h. die Wahrscheinlichkeit $P(T \leq T_0)$ ist bestimmt durch $\frac{dP}{dT} = \omega/(2\pi)$, $T \in [0, 2\pi/\omega)$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeitsdichte, zu einer festen Zeit das Teilchen am Ort q zu finden? (1 Punkt)
- b) Leiten Sie den klassischen Grenzfall der Schrödingergleichung her, d.h. gehen Sie mit dem Ansatz $\psi(q, t) = A(q)e^{\frac{i}{\hbar}W(q)}e^{-iEt/\hbar}$ in die Schrödingergleichung ein und gewinnen

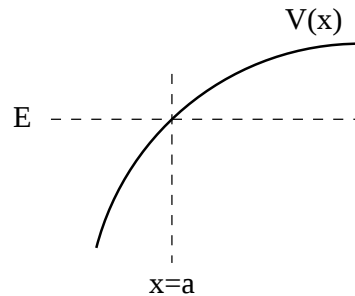
Sie Gleichungen für A und W für den Grenzfall $\hbar \rightarrow 0$. Bestimmen Sie A in Abhängigkeit von W und finden Sie einen Ausdruck für $|\psi|^2$. Vergleichen Sie mit den Aufgaben 2b und 3a. (2 Punkte)

- c) Berechnen Sie die Energieeigenwerte des eindimensionalen harmonischen Oszillators mit Hilfe der WKB-Methode. Diskutieren Sie die Bedingung für die Anwendbarkeit der WKB-Näherung. (3 Punkte)
- d) Zeigen Sie, dass die WKB-Näherung zusammen mit den Anschlußbedingungen die Bohr-Sommerfeldsche Quantisierungsbedingung bis auf eine additive Konstante reproduziert. Was folgt daraus für die Quantisierung der Energieniveaus E_n ? Vergleichen Sie dieses Resultat mit den Werten für E_n aus Aufgabe 3. (1 Punkt)



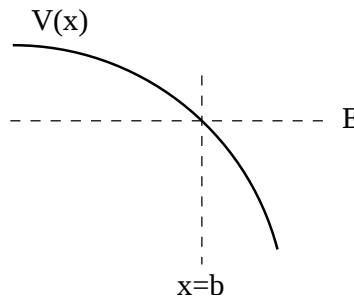
Anschlußbedingungen für die WKB-Wellenfunktionen zwischen klassisch erlaubtem und verbotem Bereich.

a) Ansteigendes Potential:



$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{k(x)}} \cos \left(\int_x^a k(x') dx' - \frac{\pi}{4} \right) &\longleftarrow \frac{1}{\sqrt{\kappa(x)}} \exp \left(- \int_a^x \kappa(x') dx' \right) \\ \frac{1}{\sqrt{k(x)}} \cos \left(\int_x^a k(x') dx' - \frac{\pi}{4} + \phi \right) &\longrightarrow \frac{1}{\sqrt{\kappa(x)}} \sin \phi \exp \left(\int_a^x \kappa(x') dx' \right) \end{aligned}$$

b) Abfallendes Potential:



$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\kappa(x)}} \exp \left(- \int_x^b \kappa(x') dx' \right) &\longrightarrow \frac{2}{\sqrt{k(x)}} \cos \left(\int_b^x k(x') dx' - \frac{\pi}{4} \right) \\ \frac{1}{\sqrt{\kappa(x)}} \sin \phi \exp \left(\int_x^b \kappa(x') dx' \right) &\longleftarrow \frac{1}{\sqrt{k(x)}} \cos \left(\int_b^x k(x') dx' - \frac{\pi}{4} + \phi \right) \end{aligned}$$

Hierbei gilt:

$$k(x) = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(E - V(x))} \quad \text{für } E > V(x)$$

$$\kappa(x) = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(V(x) - E)} \quad \text{für } V(x) > E$$

In beiden Fällen a) und b) sind die Anschlussbedingungen der jeweils zweiten Zeile *nicht* anwendbar, falls $|\tan \phi| \ll 1$.