



Name: \_\_\_\_\_

Tutorium: \_\_\_\_\_

Abgabe: Dienstag, 13. November 2007, in Übungsgruppe

Punkte: \_\_\_\_\_

**Aufgabe 5:** *Tunneleffekt in WKB-Näherung:  $\alpha$ -Zerfall*

Zur Beschreibung des  $\alpha$ -Zerfalls von Kernen kann folgende vereinfachte Modellvorstellung verwendet werden. Wir nehmen an, das  $\alpha$ -Teilchen sei bereits vor dem Zerfall eine separate Einheit, die im Potential des restlichen Kerns gefangen ist. Die Dynamik des  $\alpha$ -Teilchens ist durch die Schrödingergleichung in einem äußeren Potential  $V(\vec{r})$  bestimmt, welches die durch den Restkern verursachte attraktive starke Kernkraft und repulsive elektrische Kraft beschreibt. Für das Potential  $V(\vec{r})$  nehmen wir die 1928 von Gamow<sup>1</sup> vorgeschlagene Form an:  $V(\vec{r})$  sei rotationssymmetrisch, innerhalb des Kernradius  $R$  konstant und ausserhalb des Kernradius ein reines Coulombpotential,

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 < 0 & (r < R) \\ 2(Z-2) \frac{e_0^2}{r} & (r \geq R) \end{cases},$$

wobei  $Z$  die Ladungszahl des unzerfallenen Kerns ist und  $e_0$  die Elementarladung. Der  $\alpha$ -Zerfall kommt dann einem Durchtunneln der durch das Coulombpotential gegebenen Barriere gleich.

Schreiben Sie die radiale Schrödingergleichung für eine winkelunabhängige Wellenfunktion  $\psi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r} u(r)$  auf. Machen Sie einen WKB-Ansatz für die drei relevanten Bereiche im Fall  $0 < E < V(R)$  (für das Kerninnere können Sie direkt die exakte Lösung angeben). Verwenden Sie Anschlußbedingungen, um einen Ausdruck für den Transmissionskoeffizienten der Potentialbarriere zu finden. (5 Punkte)

Hinweise:

- Da die radiale Wellenfunktion  $u(r)$  bei  $r = 0$  verschwinden muß, erhalten Sie im Außenbereich eine Überlagerung von aus- und einlaufender Welle. Da wir für den Zerfall aber nur den auslaufenden Teil berücksichtigen dürfen, müssen Sie die Bedingung  $u(0) = 0$  ignorieren.
- Der Transmissionskoeffizient der Barriere ist

$$T = \frac{k_{\text{aus}}}{k_{\text{ein}}} \frac{|A_{\text{aus}}|^2}{|A_{\text{ein}}|^2},$$

wobei  $k_{\text{ein}}$ ,  $k_{\text{aus}}$  die Wellenzahlen und  $A_{\text{ein}}$ ,  $A_{\text{aus}}$  die Amplituden der ein- bzw. auslaufenden Teilchen sind. Das sich ergebende Integral brauchen Sie nicht auszurechnen.



Georgy Antonovich  
Gamow (1904 – 1968)

<sup>1</sup> Literaturempfehlung: G. Gamow, *Thirty years that shook physics. The story of quantum theory*. New York: Doubleday 1966

Bemerkung zu Aufgabe 5: Geht man davon aus, daß das  $\alpha$ -Teilchen im Kern immer hin- und herläuft und dabei pro Sekunde  $10^{21}$  mal auf die Barriere trifft, so ist die mittlere Lebensdauer ungefähr

$$\tau = \frac{1}{10^{21} T} \text{ Sekunden,}$$

wobei  $T$  der Transmissionskoeffizient der Potentialbarriere ist.

### Aufgabe 6: Borel-Transformation und Hermite-Polynome

Die Borel-Transformierte einer Potenzreihe  $P(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$  ist definiert durch  $\mathcal{B}[P(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n$ . Entsprechend ist die inverse Borel-Transformierte definiert durch  $\mathcal{B}^{-1}[P(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} n! a_n t^n$ . Bemerkte sei, dass die Borel-Transformation ein wichtiges mathematisches Hilfsmittel ist, um Potenzreihen in  $t$ , welche sogenannte asymptotische Entwicklungen mit Konvergenzradius Null darstellen, eindeutig einer analytischen Funktion  $f(t)$  zuzuordnen (Borel-Summierbarkeit). Zum Beispiel sind störungstheoretische Schleifenentwicklungen, welche Potenzreihen in einer kleinen Kopplungskonstante  $g$  darstellen, in gewissen niedrig-dimensionalen Quantenfeldtheorien Borel-summierbar.

- a) Zeigen Sie, dass im Falle absoluter Konvergenz der Potenzreihe  $P(t)$  gegen die Funktion  $f(t)$  auf  $\mathbb{R}_+$  die inverse Borel-Transformierte gegeben ist durch

$$\mathcal{B}^{-1}[P(t)] = \int_0^{\infty} ds \exp[-s] f(st).$$

(1 Punkt)

- b) Der vollständige Satz von ortsdargestellten Energieeigenfunktionen beim quantenmechanischen harmonischen Oszillator, die Hermite-Polynome  $\{H_n(x)\}$ , können als Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung einer Erzeugenden Funktion

$$F(t, x) \equiv \exp[-t^2 + 2tx] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n H_n(x) \equiv P(t; x)$$

aufgefasst werden. Zeigen Sie durch Ausführen von

$$\left. \frac{d^n}{dt^n} F(t, x) \right|_{t=0},$$

dass  $H_n(x)$  ein Polynom  $n$ -ten Grades ist und dass der Koeffizient  $h_n$  bei  $x^n$  gegeben ist durch  $h_n = 2^n$ .

(1 Punkt)

- c) Zeigen Sie nun, dass der Konvergenzradius der Potenzreihenentwicklung  $P(t; x)$  von  $F(t, x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  unendlich ist.

(1 Punkt)

- d) Zeigen Sie weiterhin, dass für genügend grosse  $|x|$  die Potenzreihen  $\hat{P}(x, t) \equiv \mathcal{B}^{-1}[P(t; x)]$  und  $\tilde{P}(x, t) \equiv \mathcal{B}^{-1}[\mathcal{B}^{-1}[P(t; x)]]$  respektive einen  $x$ -abhängigen, endlichen Konvergenzradius und einen verschwindenden Konvergenzradius aufweisen.

*Bemerkung:* Man kann also die in  $t$  auf ganz  $\mathbb{R}$  analytische Funktion  $F(t, x)$  als zweifache Borel-Transformierte einer Potenzreihe  $\tilde{P}(x, t)$  mit verschwindendem Konvergenzradius auffassen. Falls eine analytische Fortsetzung von  $\hat{P}(x, t)$  auf ganz  $\mathbb{R}_+$  existiert, wird nach Anwendung von  $\mathcal{B}^{-1}$  der Potenzreihe  $\tilde{P}(x, t)$  eindeutig die Funktion  $\tilde{f}(x, t)$  zugewiesen. (2 Punkte)