Institut für Theoretische Physik der Universität Karlsruhe
Prof. Dr. F. R. Klinkhamer, PD Dr. R. Hofmann

Theoretische Physik E im Wintersemester 2007/2008

Übungsblatt 4

Name: ______________________ Tutorium: ____________

Abgabe: Dienstag, 20. November 2007, in Übungsgruppe Punkte: ____________

Aufgabe 7: *Raum und Dualraum*

Die Elemente des quantenmechanischen Zustandsraums $\mathcal{V}$ werden auch als Kets $|a\rangle$ bezeichnet. $|a\rangle, |b\rangle \in \mathcal{V}$ seien fest gewählt. Als Abbildungen zwischen welchen Räumen kann man die Objekte $\langle a|$ und $|a\rangle\langle b|$ verstehen? Für endlichdimensionales $\mathcal{V}$ kann man $|a\rangle$, $\langle a|$, $\langle a|b\rangle$, $|a\rangle\langle b|$ als endliche, nicht unbedingt quadratische Matrizen auffassen. Wieviele Zeilen und Spalten haben die angegebenen Objekte jeweils?
(3 Punkte)

Aufgabe 8: *Projektion auf Unterraum und Schmidt-Verfahren*

Die Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) = 0 \quad \text{für } -1 \leq x \leq 0\,, \qquad f(x) = \sqrt{x} \quad \text{für } 0 \leq x \leq 1\,.$$

Erhard Schmidt
(1876 - 1959)

Begründen Sie: Unter allen reellen Polynomfunktionen g höchstens zweiten Grades gibt es genau eine, für die das Integral

$$\int_{-1}^{1} (f(x) - g(x))^2 \mathrm{d}x$$

minimal wird. Bestimmen Sie diese Polynomfunktion und den zugehörigen Integralwert. Verwenden Sie hierzu Methoden der linearen Algebra. Differenzieren ist verboten, Integrieren erlaubt.

Hinweis: Konstruieren Sie einen vierdimensionalen Vektorraum mit einem geeigneten Skalarprodukt. Verwenden Sie das Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren und den Satz des Pythagoras.
(4 Punkte)

Aufgabe 9: *Direkte Summe von Vektorräumen*
Sind U, W zwei Untervektorräume eines Vektorraums V, so ist die Summe $U + W$ definiert als der von der Menge $U \cup W$ aufgespannte Untervektorraum von V. Falls außerdem $U \cap W = \{0\}$, so heißt die Summe direkt und man schreibt $U \oplus W$.

a) Es gelte $V = U \oplus W$. Zeigen Sie, daß dann jeder Vektor $|v\rangle \in V$ eine eindeutige Zerlegung $|v\rangle = |u\rangle + |w\rangle$ besitzt mit $|u\rangle \in U$, $|w\rangle \in W$. (Sie können davon ausgehen, daß alle Räume endliche Dimension haben.)
(1 Punkt)

b) Es gelte wieder $V = U \oplus W$. Ferner sei eine Abbildung $P : V \to V$ definiert durch

$$P : |v\rangle = |u\rangle + |w\rangle \mapsto P|v\rangle := |w\rangle \,.$$

Zeigen Sie: P ist linear und es gilt $P^2 = P$. Bestimmen Sie die Eigenräume von P.
(1 Punkt)

c) Gegeben sei eine Basis $\{|1\rangle, \ldots |n\rangle\}$ von V, wobei $|i\rangle \in U$ für $i = 1 \ldots m$ und $|i\rangle \in W$ für $i = m + 1 \ldots n$. Wie sieht die Matrixdarstellung des in Teilaufgabe b) konstruierten Projektors in dieser Basis aus? Wie sieht die Matrixdarstellung eines Operators A aus, der die Untervektorräume U, W invariant läßt (d.h. $AU \subseteq U$, $AW \subseteq W$)?
(1 Punkt)