



Name: _____

Tutorium: _____

Abgabe: Dienstag, 4. Dezember 2007, in Übungsgruppe

Punkte: _____

Aufgabe 13: $SU(2)$ und $O(2,1)$

Unter Benutzung derselben Konventionen wie bei Aufgabe 12, lösen Sie folgende Probleme:

a) Betrachten Sie die folgende Lie-Algebra

$$[\lambda_1, \lambda_2] = -i\lambda_3, \quad [\lambda_2, \lambda_3] = i\lambda_1, \quad [\lambda_3, \lambda_1] = i\lambda_2.$$

Bestimmen Sie alle Strukturkonstanten k_{ab}^c . Sind diese total antisymmetrisch? Finden Sie eine Darstellung dieser Algebra mit 2×2 -Matrizen. (Hinweis: Benutzen Sie das Resultat von Aufgabe 13 b) und Aufgabe 12 b).) Was können Sie bezüglich der Kompaktheit der zugehörigen Lie-Gruppe T sagen?

(2 Punkte)

b) Man definiere nun neue Generatoren $\lambda'_1 = i\lambda_1$, $\lambda'_2 = i\lambda_2$, und $\lambda'_3 = \lambda_3$. Zeigen Sie, dass, falls $\hbar = 1$, die λ'_i dieselben Vertauschungsrelationen erfüllen wie die Komponenten des quantenmechanischen Bahndrehimpulses $\vec{L} \equiv \vec{r} \times \vec{p}$. Vergleichen Sie mit Aufgabe 12 b). Wodurch unterscheiden sich endliche Transformationen der adjungierten Darstellung (3×3 -Matrizen) von denen in der Darstellung mit 2×2 -(Pauli-)Matrizen?

(3 Punkte)

Aufgabe 14: Teilchenoszillation der neutralen Kaonen

Die (elektrisch) neutralen Kaonen K^0 und $\bar{K}^0$ können erzeugt werden, indem man geladene Kaonen oder Pionen auf ein Target mit Protonen und Neutronen schießt:

$$K^- + p \rightarrow \bar{K}^0 + n$$

$$K^+ + n \rightarrow K^0 + p$$

$$\pi^- + p \rightarrow \Lambda^0 + K^0$$

Bei all diesen Prozessen spielt die *starke Wechselwirkung*, die auch für die Kernkraft verantwortlich ist, die entscheidende Rolle. Der Zerfall der neutralen Kaonen läuft hingegen über die *schwache Wechselwirkung* ab. Möglich sind Zerfälle in zwei oder drei Pionen. Da K^0 und $\bar{K}^0$ insbesondere auch in denselben Endzustand zerfallen können,

$$K^0 \rightarrow \pi^0 + \pi^0, \quad \bar{K}^0 \rightarrow \pi^0 + \pi^0,$$

kann man sich vorstellen, daß auch eine *Umwandlung* von K^0 in $\bar{K}^0$ und umgekehrt möglich ist, wobei dann der zwei-Pion-Zustand als Zwischenzustand auftritt,

$$K^0 \leftrightarrow \pi^0 + \pi^0 \leftrightarrow \bar{K}^0.$$

Wir beschreiben die neutralen Kaonen vereinfachend als Zweizustandssystem, aufgespannt von $|K^0\rangle$ und $|\bar{K}^0\rangle$. Der Tatsache, daß das Kaon zerfallen kann, tragen wir dadurch Rechnung, daß wir die Wellenfunktion nicht auf eins normieren, sondern auf eine zeitlich abnehmende Exponentialfunktion. Der Hamiltonoperator

$$H = H_{\text{stark}} + H_{\text{schwach}}$$

setzt sich aus einem Anteil der starken Wechselwirkung und einem Anteil der schwachen Wechselwirkung zusammen. Elektromagnetische Kräfte und Gravitation spielen hier keine Rolle. Da die Kaonen durch die starke Wechselwirkung erzeugt werden, nehmen wir an, daß $|K^0\rangle$ und $|\bar{K}^0\rangle$ *Eigenzustände* von H_{stark} sind (mit demselben Eigenwert m_0). Da die schwache Wechselwirkung eine Teilchenumwandlung zuläßt, ist das Matrixelement $\langle K^0 | H_{\text{schwach}} | \bar{K}^0 \rangle$ von null verschieden. Wir nehmen für H_{schwach} folgende Form an:

$$H_{\text{schwach}} = \begin{pmatrix} A - \frac{1}{2}i\gamma_1 & A - \frac{1}{2}i\gamma_2 \\ A - \frac{1}{2}i\gamma_2 & A - \frac{1}{2}i\gamma_1 \end{pmatrix}$$

mit reellem A . H_{schwach} besitzt einen nichthermiteschen Anteil, der die exponentiell abfallende Normierung der Wellenfunktion bewirkt.

- a) Angenommen, wir haben zur Zeit $t = 0$ ein K^0 -Teilchen mit auf eins normierter Wellenfunktion, $|\psi(0)\rangle = |K^0\rangle$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $|\langle \bar{K}^0 | \psi(t) \rangle|^2$, zur Zeit $t > 0$ ein $\bar{K}^0$ vorzufinden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet man ein K^0 ?
(3 Punkte)

- b) Ein Teilchen, dessen Wellenfunktion gemäß $\langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = e^{-\Gamma t}$ normiert ist, hat die Lebensdauer $\tau = 1/\Gamma$ (Wir setzen $\hbar = c = 1$). Die beiden Eigenzustände von H , die wir $|K_1\rangle$, $|K_2\rangle$ nennen wollen, haben die Lebensdauern $\tau_1 = 0,9 \cdot 10^{-10}\text{s}$, $\tau_2 = 0,5 \cdot 10^{-7}\text{s}$. Für die Differenz Δm der Realteile der beiden H -Eigenwerte findet man experimentell den Wert $\Delta m = \text{Re}(E_1 - E_2) \approx 0,5/\tau_1$.

Zeichnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $|\langle \bar{K}^0 | \psi(t) \rangle|^2$, $|\langle K^0 | \psi(t) \rangle|^2$ aus Teilaufgabe a) für $0 \leq t \leq 15\tau_1$.

(2 Punkte)

Bemerkung: Experimentell findet man kleine Abweichungen vom hier berechneten Verhalten, woraus man schließt, daß die sog. *CP-Symmetrie* verletzt ist.