Theoretische Physik E im Wintersemester 2007/2008

Übungsblatt 7

Name: ______________________ Tutorium: __________

Abgabe: Dienstag, 11. Dezember 2007, in Übungsgruppe Punkte: __________

Aufgabe 15: *Implikationen der Drehimpulsalgebra*

Aus der Lie-Klammer $[L_i, L_j] = i\hbar \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} L_k$ für die Drehimpulskomponenten L_i ergeben sich für $\vec{L}^2 \equiv \sum_{k=1}^{3} L_k^2$, L_i und $L_\pm \equiv L_1 \pm iL_2$ die folgenden Sachverhalte

$$[\vec{L}^2, L_i] = 0\,,\ [L_3, L_\pm] = \pm\hbar L_\pm\,,\ [L_+, L_-] = 2\hbar L_3\,, [\vec{L}^2, L_\pm] = 0\,,\ L_\pm L_\mp = \vec{L}^2 \pm \hbar L_3 - L_3^2\,. \ (*)$$

a) Leiten Sie die Identitäten unter (*) her.
(1 Punkt)

b) Sei $|lm\rangle$ ein normierter Eigenzustand zu $\vec{L}^2$ und L_3 mit den Eigenwerten $l(l+1)\hbar^2$ ($l \geq 0$, $\vec{L}^2$ positiv semidefiniter Operator!) und $m\hbar$. Wie ist die Normierung der Zustände $L_\pm|lm\rangle$ und, falls diese Eigenzustände von $\vec{L}^2$ und L_3 sind, zu welchen Eigenwerten sind sie das?
(1 Punkt)

c) Gewinnen Sie aus der Positivität von $\langle lm|L_\mp L_\pm|lm\rangle$ eine Aussage über den maximalen Wert von $|m|$ bei gegebenem l. Finden Sie durch Abzählen der möglichen Eigenzustände $|lm\rangle$ bei gegebenem l einen Ausdruck für die möglichen Werte von l.
(2 Punkte)

d) Zeigen Sie, dass aus $\langle\psi|\vec{L}^2|\psi\rangle = 0$ auch $\langle\psi|L_i|\psi\rangle = 0$ folgt.
(1 Punkt)

Aufgabe 16: *Clebsch-Gordan-Koeffizienten (I)*

Eine Darstellung $T(\mathcal{L}_G)$ einer Lie-Algebra $\mathcal{L}_G$ auf einem n-dimensionalen Vektorraum V heisst irreduzibel, falls V keinen echten Unterraum U besitzt, sodass $T(\mathcal{L}_G)U \subseteq U$.
Betrachten Sie zwei Vektorräume V_1 und V_2, auf denen je eine irreduzible Darstellung der Lie-Algebra $\mathcal{L}_{\mathrm{SO}(3)}$ operiert. D.h. wir haben einen Drehimpulsoperator $\vec{J}_1$ auf V_1 und einen Drehimpulsoperator $\vec{J}_2$ auf V_2. Aus der Irreduzibilität folgt, daß jeder Vektor aus V_1 Eigenvektor von $\vec{J}_1^2$ ist zum selben Eigenwert $\hbar^2 j_1(j_1+1)$. Analog ist $\vec{J}_2^2 = \hbar^2 j_2(j_2+1)\,\mathbf{1}_{V_2}$. Ferner ist $\dim V_1 = 2j_1 + 1$, $\dim V_2 = 2j_2 + 1$.
Wir betrachten nun das Tensorprodukt $V = V_1 \otimes V_2$ mit dem Drehimpuls $\vec{J} = \vec{J}_1 \otimes \mathbf{1}_{V_2} + \mathbf{1}_{V_1} \otimes \vec{J}_2$.

a) Geben Sie zunächst alle paarweisen Vertauschungsregeln der Operatoren $\vec{J}_1^2$, $\vec{J}_2^2$, J_{1j}, J_{2k}, J_l, $\vec{J}^2$ an.

(1 Punkt)

b) V hat eine Basis $B_1 = \{|j_1, j_2 : m_1, m_2\rangle\}$ aus gemeinsamen Eigenvektoren von $\vec{J}_1^2$, $\vec{J}_2^2$, J_{1z}, J_{2z}.
Drücken Sie diese Kets durch die Drehimpulseigenbasen von V_1, V_2 aus und geben Sie die Wirkung von $\vec{J}_1^2$, $\vec{J}_2^2$, J_{1z}, J_{2z} darauf an.
(2 Punkte)

Die durch $\vec{J}$ gegebene Darstellung der $\mathcal{L}_{\mathrm{SO}(3)}$ auf V ist reduzibel; sie läßt sich als direkte Summe von irreduziblen Darstellungen schreiben. Wir suchen also nach einer Zerlegung

$$V = V^{(j_1)} \oplus V^{(j_2)} \oplus \cdots \oplus V^{(j_n)},$$

so daß $V^{(j_k)}$ eine irreduzible Darstellung trägt mit $\dim V^{(j_k)} = 2j_k + 1$. Anders formuliert: Wir suchen eine Basis $B_2 = \{|j, m\rangle\}$ von V aus gemeinsamen Eigenvektoren von $\vec{J}^2$ und J_z, wobei j die Werte $j_1, j_2, \ldots j_n$ annehmen kann und m jeweils von $-j$ bis $+j$ läuft.

c) Bestimmen Sie den Entartungsgrad der Eigenwerte m von J_z. Unterscheiden Sie hierzu die Fälle $|m| \leq j_2 - j_1$ und $|m| \geq j_2 - j_1$, wobei o.B.d.A. $j_2 \geq j_1$. Überlegen Sie sich, welche Werte j annimmt.
(2 Punkte)