Institut für Theoretische Physik der Universität Karlsruhe
Prof. Dr. F. R. Klinkhamer, PD Dr. R. Hofmann

Theoretische Physik E im Wintersemester 2007/2008

Übungsblatt 8

Name: ______________________ Tutorium: __________

Abgabe: Dienstag, 18. Dezember 2007, in Übungsgruppe Punkte: __________

Aufgabe 17: *Clebsch-Gordan-Koeffizienten (II)*

Wir benutzten dieselben Konventionen wie bei Aufgabe 16. Die Basis B_2 kann mit Hilfe der *Clebsch-Gordan-Koeffizienten* $\langle j_1, j_2 : m_1, m_2 | j, m\rangle$ durch die Basis B_1 ausgedrückt werden,

$$|j,m\rangle = \sum_{m_1}\sum_{m_2} |j_1, j_2 : m_1, m_2\rangle\langle j_1, j_2 : m_1, m_2|j,m\rangle\,.$$

Es ist üblich, die Clebsch-Gordan-Koeffizienten reell zu wählen.

a) Zeigen Sie, daß die Clebsch-Gordan-Koeffizienten nur für $m = m_1 + m_2$ von Null verschieden sind.
(1 Punkt)

b) Bestimmen Sie die Clebsch-Gordan-Koeffizienten für $j_1 = j_2 = \frac{1}{2}$, indem Sie in B_1 und B_2 die Vektoren mit dem höchsten m-Wert identifizieren und dann die Leiteroperatoren J_+, J_- verwenden. Beachten Sie außerdem, daß Drehimpulseigenvektoren zu verschiedenen j-Werten orthogonal sind.
(2 Punkte)

c) Schreiben Sie die Operatoren J_x, J_y und J_z als 4×4-Matrizen bzgl. der Basis B_1. Fassen Sie auch die Clebsch-Gordan-Koeffizienten zu einer Matrix C zusammen und zeigen Sie, daß diese unitär ist. Bestimmen Sie explizit die Matrixdarstellung von J_x, J_y und J_z bzgl. der Basis B_2 durch Ähnlichkeitstransformation mit C,

$$(J_k)_{B_2} = C^t (J_k)_{B_1} C\,.$$

(2 Punkte)

d) Geben Sie die irreduziblen Darstellungen der Drehimpulsalgebra an, in die das Tensorprodukt $(j_1 = 1) \otimes (j_2 = 1) \otimes (j_3 = 1/2)$ zerfällt.
(1 Zusatzpunkt)

Aufgabe 18: *Spin-Bahn-Kopplung*

Der vom Wasserstoff-Atom bekannte Hamilton-Operator des Coulomb-Problems ist eigentlich eine Näherung für Geschwindigkeiten $\ll c$. Für eine genauere Rechnung muß man relativistische Korrekturen mitnehmen. Einer dieser Korrekturterme ist die Spin-Bahn-Kopplung H_{LS}:

$$\begin{aligned}
H &= H_0 + H_{LS} \\
H_0 &= \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r) \quad \text{mit} \quad V(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 \, r} \\
H_{LS} &= \frac{1}{2m^2c^2}\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\vec{L}\cdot\vec{S}
\end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Aufspaltung der Niveaus durch die Spin-Bahn-Kopplung in Störungsrechnung erster Ordnung.
Hinweise: Es empfiehlt sich, den Gesamtdrehimpuls $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ zu betrachten.
Das bei der Lösung auftretende Radialintegral hat folgenden Wert:

$$\int_0^\infty \mathrm{d}r \, r^2 |R_{n\ell}(r)|^2 \frac{a_0^3}{r^3} = \frac{Z^3}{n^3\ell\left(\ell+\frac{1}{2}\right)(\ell+1)}\,,$$

wobei a_0 der Bohrsche Radius und $R_{n\ell}$ die üblichen Radialanteile der Wasserstoff-Eigenfunktionen sind.
(5 Punkte)