



Name: _____

Tutorium: _____

Abgabe: Dienstag, 7. Januar 2008, in Übungsgruppe

Punkte: _____

Aufgabe 19: *Identische Teilchen*

- a) Wir betrachten ein ideales Gas mit N identischen Teilchen in einem Behälter. Die Teilchen wechselwirken also nicht miteinander. Die möglichen Energien E_n ($n \in \mathbb{N}_0$) für ein Teilchen seien diskret und nicht entartet (im Falle von Elektronen könnte man z.B. ein Magnetfeld einschalten, um die Spinentartung aufzuheben). Was sind die möglichen Energieeigenzustände und -werte für das gesamte N -Teilchen-System? Was sind der Grundzustand und die Grundzustandsenergie? Unterscheiden Sie jeweils zwischen Bosonen und Fermionen.

(1 Punkt)

- b) Drei identische Teilchen mit Spin 0 seien an den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks in der xy -Ebene fixiert. Das Dreieck als ganzes kann um die z -Achse rotieren, die durch seinen Schwerpunkt verlaufe. Was sind die möglichen Meßwerte des Drehimpulses L_z in z -Richtung?

(1 Punkt)

Aufgabe 20: *Dreidimensionaler, isotroper harmonischer Oszillator*

- a) Man fasse den quantenmechanischen Zustandsraum $\mathcal{E}$ für ein Teilchen im dreidimensionalen Anschauungsraum als Tensorprodukt

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_x \otimes \mathcal{E}_y \otimes \mathcal{E}_z$$

auf, wobei $\mathcal{E}_x$, $\mathcal{E}_y$ und $\mathcal{E}_z$ Kopien des Zustandsraums für ein Teilchen in einer Dimension sind. Die Ortsoperatoren dieser Räume bezeichnen wir mit X , Y , Z und die zugehörigen Eigenbasen mit $\{|x\rangle\}$, $\{|y\rangle\}$, $\{|z\rangle\}$. Angenommen, der Hamiltonoperator in $\mathcal{E}$ hat die Gestalt $H = H_x + H_y + H_z$, wobei H_x , H_y , H_z Hamiltonoperatoren in $\mathcal{E}_x$, $\mathcal{E}_y$, $\mathcal{E}_z$ sind. Drücken Sie die Eigenwerte und -kets von H durch diejenigen von H_x , H_y , H_z aus.

(1 Punkt)

- b) Finden Sie so die Energieeigenwerte des dreidimensionalen isotropen harmonischen Oszillators mit dem Potential $V(\vec{r}) = \frac{1}{2}m\omega^2\vec{r}^2$. Wie hoch ist der Grad der Entartung g_n der einzelnen Energieniveaus?

(1 Punkt)

- c) Der Hamiltonoperator vertauscht mit allen Drehimpulskomponenten. Daher trägt jeder Energieeigenraum eine separate Drehimpulsdarstellung. Wir wollen die Energieeigenräume als direkte Summe von Vektorräumen zu verschiedenen Drehimpulsquantenzahlen (d.h. $\vec{L}^2$ -Eigenwerten) schreiben. Gehen Sie von den Erzeugern $a_x^\dagger$, $a_y^\dagger$, $a_z^\dagger$ und

Vernichtern a_x, a_y, a_z für die drei Raumrichtungen über zu $a_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x + ia_y)$ und $a_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x - ia_y)$.

Zeigen Sie, daß $(a_+^\dagger, a_+)$, $(a_-^\dagger, a_-)$ und $(a_z^\dagger, a_z)$ unabhängige Oszillatoren beschreiben. Zeigen Sie, daß $N_+ + N_- + N_z = N_x + N_y + N_z$, wobei $N_{\dots}$ die Zähloperatoren sind. Wie kann man also die Energieniveaus durch die Eigenwerte von N_+, N_-, N_z ausdrücken?

(1 Punkt)

- d) Drücken Sie die Drehimpulsoperatoren L_z, L_+, L_- durch die Erzeuger und Vernichter aus.

(1 Punkt)

- e) Welche Eigenwerte hat L_z innerhalb eines Energieeigenraumes? Finden Sie die Multiplizität dieser L_z -Eigenwerte, unterscheiden Sie dabei gerade und ungerade Vielfache von $\hbar$.

(1 Punkt)

- f) Finden Sie unter Verwendung des vorigen Teilergebnisses die Zerlegung der Energieeigenräume in Eigenräume von $\vec{L}^2$. Konkret: Geben Sie die Wirkung von $H, \vec{L}^2, L_z$ auf eine gemeinsame Eigenbasis an.

Bemerkung: Die Energieentartung zwischen verschiedenen irreduziblen Unterräumen eines Energieeigenraums wird durch die Drehsymmetrie nicht erklärt; man spricht daher von *zufälliger Entartung*.

(1 Punkt)

- g) Diese Entartung ist aber nicht wirklich zufällig ist, sondern vielmehr auf eine erweiterte Symmetrie zurückzuführen. Zeigen Sie, daß die 9 Operatoren

$$K_{ij} := a_i^\dagger a_j \quad (i, j = 1 \dots 3)$$

eine Liealgebra aufspannen, welche eine Erweiterung der Drehimpulsalgebra darstellt (d.h. die Operatoren $-\frac{i}{\hbar}L_k$ sind reelle Linearkombinationen der K_{ij}). Zeigen Sie weiter, daß alle K_{ij} mit dem Hamiltonoperator vertauschen. Zeigen Sie, daß die von den K_{ij} aufgespannte Liealgebra auf jedem Energieeigenraum irreduzibel operiert.

(2 Punkte)