



Name: \_\_\_\_\_

Tutorium: \_\_\_\_\_

Abgabe: Dienstag, 21. Januar 2008, in Übungsgruppe

Punkte: \_\_\_\_\_

**Aufgabe 22: Isospin**

In der Elementarteilchenphysik unterscheidet man vier fundamentale Wechselwirkungen: starke, schwache, elektromagnetische und gravitative. Experimentell zeigt sich, daß die starke Wechselwirkung den Unterschied zwischen Proton und Neutron nicht sieht. Analog zur algebraischen Quantisierung des harmonischen Oszillators von gegebener Frequenz haben wir nunmehr fermionische Erzeuger und Vernichter  $P_\alpha^\dagger, P_\alpha$  für ein Proton im gegebenen Zustand  $|\alpha\rangle$  und  $N_\alpha^\dagger, N_\alpha$  für ein Neutron im gegebenen Zustand  $|\alpha\rangle$ :

$$\{N_\alpha, N_\beta^\dagger\} = \delta_{\alpha\beta} = \{P_\alpha, P_\beta^\dagger\}, \quad [N_\alpha, P_\beta] = [N_\alpha^\dagger, P_\beta^\dagger] = [N_\alpha, P_\beta^\dagger] = [N_\alpha^\dagger, P_\beta] = 0,$$

wobei der Antikommutator  $\{\cdot, \cdot\}$  unter Aufgabe 24 definiert ist. Die Operatoren

$$T^+ := \sum_\alpha P_\alpha^\dagger N_\alpha, \quad T^- := \sum_\alpha N_\alpha^\dagger P_\alpha$$

ersetzen Neutronen durch Protonen (bzw. umgekehrt). Folglich müssen diese Operatoren mit dem Hamiltonoperator  $H_s$  der starken Wechselwirkung vertauschen,

$$[H_s, T^+] = [H_s, T^-] = 0.$$

- Berechnen Sie den Operator  $T_3 := [T^+, T^-]$  und zeigen Sie, daß auch dieser mit  $H_s$  vertauscht.  
(1 Punkt)
- Zeigen Sie, daß die Operatoren  $T^+, T^-, T_3$  die Drehimpulsvertauschungsrelationen erfüllen, indem Sie  $[T_3, T^\pm]$  explizit berechnen. Diese Symmetrie unter  $T^\pm, T^3$  nennt man *Isospin-Symmetrie*.  
(2 Punkte)

**Aufgabe 23: Besetzungszahldarstellung und Fockraum für identische Bosonen**

Der Einteilchen-Hamiltonoperator  $H = \vec{p}^2/2m + V(\vec{x})$  für ein bosonisches Teilchen habe ein rein diskretes Spektrum mit Energieeigenwerten  $E_1, E_2, \dots$  und zugehörigen Eigenfunktionen  $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots$

- Begründen Sie: Der Zustandsraum  $\mathcal{H}^{(N)}$  für  $N$  identische, nicht miteinander wechselwirkende Bosonen mit diesem Einteilchen-Hamiltonoperator  $H$  besitzt eine Basis der Form

$$\{|n_1, n_2, \dots\rangle\},$$

wobei  $\sum_i n_i = N$ , und  $n_i$  gibt an, wieviele Teilchen sich im Energieeigenzustand  $|\psi_i\rangle$  befinden.

(1 Punkt)

Wir wollen nun einen erweiterten Zustandsraum konstruieren, der Zustände mit *beliebiger* Teilchenzahl beinhaltet. Dieser Raum heißt *Fockraum* und ist definiert als direkte Summe von Räumen mit fester Teilchenzahl:

$$\mathcal{F} := \bigoplus_{N=0}^{\infty} \mathcal{H}^{(N)}.$$

Hierbei ist  $\mathcal{H}^{(N)}$  für  $N \geq 1$  der  $N$ -Teilchenzustandsraum und  $\mathcal{H}^{(0)}$  ein eindimensionaler Vektorraum, der von einem einzigen Basisvektor  $|0\rangle \equiv |0, 0, \dots\rangle$  aufgespannt wird und das Vakuum repräsentiert.

Weiter definieren wir Vernichtungsoperatoren  $a_i$ , die aus einem gegebenen  $N$ -Teilchenzustand ein Teilchen im Zustand  $|\psi_i\rangle$  entfernen, die Gesamtteilchenzahl also um eins verringern,

$$a_i |n_1, n_2, \dots\rangle := \sqrt{n_i} |n_1, n_2, \dots, n_{i-1}, n_i - 1, n_{i+1}, n_{i+2}, \dots\rangle.$$

b) Zeigen Sie, daß der adjungierte Operator  $a_i^\dagger$  als Erzeugungsoperator wirkt:

$$a_i^\dagger |n_1, n_2, \dots\rangle = \sqrt{n_i + 1} |n_1, n_2, \dots, n_{i-1}, n_i + 1, n_{i+1}, n_{i+2}, \dots\rangle.$$

(1 Punkt)

c) Berechnen Sie die Kommutatoren

$$[a_i, a_j], \quad [a_i^\dagger, a_j^\dagger], \quad [a_i, a_j^\dagger].$$

(1 Punkt)

Wir wollen nun einen Basiswechsel durchführen: Anstelle der  $H$ -Eigenzustände  $|\psi_i\rangle$  sollen Ortseigenzustände  $|\vec{x}\rangle$  verwendet werden. Den Vernichtungsoperator für ein Teilchen am Ort  $\vec{x}$  nennen wir  $\hat{\Psi}(\vec{x})$ ;  $\hat{\Psi}^\dagger(\vec{x})$  ist der zugehörige Erzeuger.

d) Berechnen Sie den Kommutator  $[\hat{\Psi}(\vec{x}), \hat{\Psi}^\dagger(\vec{y})]$ .

Hinweis: Die Basistransformation überträgt sich direkt auf die Erzeuger. Drücken Sie also zunächst  $\hat{\Psi}^\dagger$  durch die  $a_j^\dagger$  aus. Verwenden Sie außerdem die Vollständigkeit und Orthonormiertheit der beiden Basen.

(1 Punkt)

e) Bringen Sie den zeitunabhängigen Operator  $\hat{\Psi}(\vec{x})$  ins Heisenbergbild und zeigen Sie, daß  $\hat{\Psi}_H(\vec{x}, t)$  der Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{d\hat{\Psi}_H(\vec{x}, t)}{dt} = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{x}) \right) \hat{\Psi}_H(\vec{x}, t)$$

genügt, wobei  $V(\vec{x})$  das Potential aus dem Einteilchen-Hamiltonoperator  $H$  ist.

Hinweis: Der Hamiltonoperator im Fockraum kann durch Anzahloperatoren ausgedrückt werden.

(1 Punkt)

### Aufgabe 24: Supersymmetrie

Der Hamiltonoperator des eindimensionalen harmonischen Oszillators lautet  $H_B = \frac{1}{2}\hbar\omega (a^\dagger a + a a^\dagger)$ , wobei die Erzeuger und Vernichter  $a^\dagger, a$  die Vertauschungsrelationen

$$[a, a^\dagger] = 1, \quad [a, a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0$$

erfüllen. Wir definieren nun ein ähnliches System mit dem Hamiltonoperator

$$H_F = \frac{1}{2}\hbar\omega (b^\dagger b - b b^\dagger),$$

wobei

$$\{b, b^\dagger\} = 1, \quad \{b, b\} = \{b^\dagger, b^\dagger\} = 0.$$

Hierbei bezeichnet  $\{\cdot, \cdot\}$  den *Antikommutator*, allgemein:  $\{A, B\} \equiv AB + BA$ .

Bestimmen Sie zunächst die Eigenwerte von  $H_F$ . Gibt es eine Besetzungszahldarstellung und Auf- und Absteigeoperatoren analog zum gewöhnlichen harmonischen Oszillator?

Nun betrachten wir die Summe  $H = H_B + H_F$ , die auf dem Tensorprodukt der Zustandsräume operiert. Zeigen Sie, daß die Operatoren

$$Q = a^\dagger b, \quad Q^\dagger = b^\dagger a$$

mit  $H$  vertauschen. Was folgt daraus für das Spektrum von  $H$ ? Welche Zustände sind entartet? Zeigen Sie, daß

$$\{Q, Q^\dagger\} = \frac{1}{\hbar\omega} H.$$

(3 Punkte)

Erläuterung: Die Anregungen des harmonischen Oszillators  $H_B$  verhalten sich wie Bosonen, diejenigen von  $H_F$  wie Fermionen. Unter Supersymmetrie versteht man allgemein eine Symmetrie, die bosonische mit fermionischen Freiheitsgraden verknüpft. Gemeinsam mit  $H$  (dem Generator für Zeitverschiebungen) bilden die Generatoren  $Q, Q^\dagger$  der Supersymmetrie eine liealgebraähnliche Struktur, bei der aber neben Kommutatoren auch Antikommutatoren vorkommen. So etwas nennt man eine Super-Liealgebra (engl.: graded algebra).