



Name: _____

Tutorium: _____

Abgabe: Dienstag, 29. Januar 2008, in Übungsgruppe

Punkte: _____

Aufgabe 25: *Fockraum für identische Fermionen*

Der Einteilchen-Hamiltonoperator für ein fermionisches Teilchen habe ein rein diskretes Spektrum mit Energieeigenwerten $E_1, E_2, \dots$ und zugehörigen Eigenfunktionen $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots$. Der Zustandsraum $\mathcal{H}^{(N)}$ für N identische, nicht miteinander wechselwirkende Fermionen mit diesem Einteilchen-Hamiltonoperator besitzt eine Basis der Form

$$\{|n_1, n_2, \dots\rangle\},$$

wobei $\sum_i n_i = N$, und n_i gibt an, wieviele Teilchen sich im Energieeigenzustand $|\psi_i\rangle$ befinden. n_i kann nur die Werte 0 und 1 annehmen. Der Fockraum wird genauso definiert wie im bosonischen Fall. Wir definieren wieder Vernichtungsoperatoren b_i , die aus einem gegebenen N -Teilchenzustand ein Teilchen im Zustand $|\psi_i\rangle$ entfernen, die Gesamtteilchenzahl also um eins verringern,

$$b_i |n_1, n_2, \dots\rangle := \sqrt{n_i} |n_1, n_2, \dots, n_{i-1}, n_i - 1, n_{i+1}, n_{i+2}, \dots\rangle.$$

Wie im bosonischen Fall, so wirkt auch hier der adjungierte Operator $b_i^\dagger$ als Erzeuger,

$$b_i^\dagger |n_1, n_2, \dots\rangle = (1 - n_i) |n_1, n_2, \dots, n_{i-1}, n_i + 1, n_{i+1}, n_{i+2}, \dots\rangle.$$

Begründen Sie in Worten den Vorfaktor $(1 - n_i)$. Berechnen Sie den Antikommutator $\{b_i, b_j^\dagger\}$. Bilden Sie Erzeuger $\hat{\Psi}^\dagger(\vec{x})$ und Vernichter $\hat{\Psi}(\vec{x})$ für Teilchen am Ort $\vec{x}$. Berechnen Sie den Antikommutator $\{\hat{\Psi}(\vec{x}), \hat{\Psi}^\dagger(\vec{y})\}$. Genügt $\hat{\Psi}_H(\vec{x}, t)$ im Heisenbergbild einer Schrödingergleichung? (3 Punkte)

Aufgabe 26: *Zeitumkehr-Invarianz und Kramers-Entartung*

- a) $\psi(\vec{x}, t)$ sei eine ebene Welle in drei Dimensionen, verstanden als Wellenfunktion eines spinlosen Teilchens. Zeigen Sie, dass $\psi^*(\vec{x}, -t)$ die Wellenfunktion für ein Teilchen mit umgekehrter Impulsrichtung ist.

Zeigen Sie unter der Annahme, dass der Hamiltonoperator invariant unter Zeitumkehr ist, dass die Wellenfunktion eines spinlosen nichtentarteten Systems zu jedem Zeitpunkt reell gewählt werden kann.

Die Wellenfunktion für eine ebene Welle zum Zeitpunkt $t = 0$ ist gegeben durch die komplexe Funktion $e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar}$. Warum widerspricht das nicht der Zeitumkehrinvarianz? (1 Punkt)

- b) Für ein Teilchen in einem äusseren elektrischen Feld lautet der Wechselwirkungsanteil des Hamilton-Operators $e\phi(\vec{x})$, der Hamiltonoperator ist daher invariant unter Zeitumkehr. Benützen sie die Tatsache, dass zweimalige Anwendung des Zeitumkehroperators auf einen Zustand mit halbzahligem Spin diesen Zustand in minus sich selbst überführt ($T^2|(2n+1)/2\rangle = -|(2n+1)/2\rangle$), um die sogenannte Kramers-Entartung zu zeigen: Energieeigenwerte zu Zuständen mit halbzahligem Drehimpuls eines Hamilton-Operators, der mit dem Zeitumkehr-Operator vertauscht, müssen entartet sein.

Bleibt die Entartung im allgemeinen bestehen, wenn zusätzlich ein äußeres Magnetfeld angelegt wird?

(3 Punkte)

Aufgabe 27: Gamma-Matrizen

Die 4×4 -Matrizen γ^μ ($\mu = 0 \dots 3$) erfüllen die Relationen

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}, \quad (\gamma^0)^\dagger = \gamma^0, \quad (\gamma^k)^\dagger = -\gamma^k \quad (k = 1, 2, 3).$$

Hierbei ist $\eta^{\mu\nu}$ die Minkowskimetrik, $(\eta^{\mu\nu}) = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Zeigen Sie, dass die Matrix $\gamma_5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ folgende Eigenschaften hat:

$$\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0, \quad \gamma_5^\dagger = \gamma_5, \quad \gamma_5^2 = 1.$$

(3 Punkte)