



Name: _____

Tutorium: _____

Abgabe: Dienstag, 5. Februar 2008, in Übungsgruppe

Punkte: _____

Aufgabe 28: *Lorentztransformation von Dirac-Spinoren*

- a) Die Lorentztransformation eines Diracspinors ist gegeben durch

$$\psi'(x') = \Lambda \psi(x), \quad (1)$$

wobei die Matrix Λ die Relation

$$\Omega^\mu{}_\nu \gamma^\nu = \Lambda^{-1} \gamma^\mu \Lambda \quad (2)$$

erfüllen muß. $\Omega^\mu{}_\nu$ ist die Transformationsmatrix des 4-Vektors x ,

$$x'^\mu = \Omega^\mu{}_\nu x^\nu. \quad (3)$$

Zeigen Sie, dass die Diracgleichung $(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\psi(x) = 0$ forminvariant unter Lorentztransformationen ist.

(1 Punkt)

- b) Berechnen Sie das Verhalten der Stromdichte $j^\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$ unter Lorentztransformationen.

Hinweis: Der adjungierte Spinor $\bar{\psi}$ ist definiert als $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$. Sie können verwenden, dass Λ die Relation $\gamma^0\Lambda^\dagger\gamma^0 = \Lambda^{-1}$ erfüllt.

(1 Punkt)

- c) Zeigen Sie, dass man für eine infinitesimale Lorentztransformation

$$\Omega_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu} + O(\omega^2) \quad (4)$$

mit $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ die Matrix Λ wie folgt wählen kann:

$$\Lambda = \mathbf{1} + \frac{1}{8}\omega^{\mu\nu}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]. \quad (5)$$

(1 Punkt)

Aufgabe 29: *Positive-Energie-Lösungen*

Setzt man in die Dirac-Gleichung den Ansatz $\psi(x_\mu) = u(k_\mu)e^{-ik_\mu x^\mu}$ für ein Elektron (positive Energie) mit Impuls $\vec{k}$ ein, so erhält man als Bestimmungsgleichung für u das lineare Gleichungssystem $(\not{k} - m)u(k) = 0$ wobei definiert wird: $\not{k} := \gamma^\mu k_\mu = \gamma_\mu g^{\mu\nu} k_\nu$, und $(g_{\mu\nu})$ ist die Matrix der Minkowski-Metrik. Zur Vereinfachung soll im folgenden nur die Bewegung in z -Richtung mit $\vec{k} = (0, 0, k_z)$ betrachtet werden.

- a) Wieviele linear unabhängige Lösungen $u(k)$ von $(\not{k} - m)u(k) = 0$ gibt es?
(1 Punkt)
- b) Bestimmen Sie die linear unabhängigen Lösungen, die die Orthogonalitäts- und Normierungsrelation $\bar{u}_r u_{r'} = 2m\delta_{rr'}$ erfüllen.
(2 Punkte)
- c) Zeigen Sie, dass folgende Identität gilt:

$$\sum_r u_r \bar{u}_r = \not{k} + m,$$

wobei $\bar{u} := u^\dagger \gamma_0$.

(1 Punkt)

Aufgabe 30: Diracgleichung und g -Faktor des Elektrons

Betrachten Sie die Diracgleichung ($e < 0$)

$$\left\{ \gamma^\mu \left(i\hbar \partial_\mu - \frac{e}{c} A_\mu(x) \right) - mc \right\} \psi(x) = 0$$

mit den Gamma-Matrizen in Diracdarstellung,

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix}$$

($\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3$ sind die Paulimatrizen). Das Vektorpotential $A_\mu(x)$ erfülle $A_0(x) = 0$ und $\partial_0 A_\mu(x) = 0$. Schreiben Sie den Dirac-Spinor als

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_L(x) \\ \psi_S(x) \end{pmatrix},$$

wobei ψ_L, ψ_S zweikomponentige Spinoren sind.

- a) Zerlegen Sie die Dirac-Gleichung in zwei (gekoppelte) Gleichungen für ψ_L, ψ_S für den Fall, dass $\psi(x)$ stationär ist, also die Zeitabhängigkeit $e^{-iEt/\hbar}$ hat.
(1 Punkt)
- b) Wir wollen nun den nichtrelativistischen Limes bestimmen. Die Energie E zerlegen wir gemäß $E = mc^2 + E_{\text{NR}}$ in einen Anteil, der der Ruhemasse des Elektrons entspricht und einen Anteil E_{NR} . Entwickeln Sie die Gleichungen für ψ_S, ψ_L aus Teilaufgabe a) zur nullten Ordnung in E_{NR}/mc^2 (Dies entspricht im Wesentlichen einer Entwicklung in v/c). Zeigen Sie insbesondere, dass in dieser Näherung $\psi_S = 0$ ist und ψ_L einer Pauli-Gleichung mit gyromagnetischem Verhältnis $g = 2$ genügt.
(2 Punkte)

Informationen zur Klausur

- Die Klausur findet am **Donnerstag, 14. Februar 2008 um 15:00 Uhr im Gerthsen-Hörsaal** statt.
- Die Bearbeitungszeit beträgt zwei Stunden (120 Minuten). Sie dürfen zwei handbeschriebene A4-Seiten (dies entspricht *einem* beidseitig beschriebenen Blatt) mit in die Klausur nehmen. Fremdsprachige Studenten können außerdem ein Wörterbuch mitbringen.
- Die Rückgabe und Besprechung der Klausur erfolgt in der Vorlesung am Freitag, 15. Februar 2008 um 9:45 im Lehmann-Hörsaal. Dort erhalten Sie im Erfolgsfalle auch Ihren Übungsschein.
- Einen Übungsschein erhält, wer 60% der Punkte in der Klausur erzielt. Falls Sie 50% der Punkte auf den Übungsblättern erreicht haben, genügen sogar 50% der Klausurpunkte für den Schein. Bei Bedarf wird eine Nachklausur angeboten, deren Termin noch nicht feststeht.
- Auf dem Deckblatt der Klausur sollten Sie Namen und Matrikelnummer (also: Studentenausweis nicht vergessen!) deutlich lesbar vermerken, da diese Angaben für den Schein verwendet werden.