1. Übung zur Vorlesung Theoretische Physik E: Quantenmechanik II
Universität Karlsruhe WS 2008/09

Prof. Dr. Gerd Schön— Dr. Matthias Eschrig

Webseite: www-tfp.physik.uni-karlsruhe.de/Lehre/
Vorrechnen: Dienstag, 28.10.2008

Hinweis:
Tutoriumsanmeldung (22.10.08 17:00-27.10.08 12:00):
www.physik.uni-karlsruhe.de/Tutorium/WS0809/TheorieE/

Aufgabe 1 **(4 Punkte)**

HERMITEsch adjungierte Operatoren:

Zeigen Sie unter Verwendung der Definition des zu A HERMITEsch adjungierten Operators $A^\dagger$

$$\langle\psi|A^\dagger|\phi\rangle = \langle\phi|A|\psi\rangle^* \tag{1}$$

dass gilt

a) $(A^\dagger)^\dagger = A$
b) $(\lambda A)^\dagger = \lambda^* A^\dagger$
c) $(A+B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$
d) $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$.

Aufgabe 2 **(6 Punkte)**

Eigenwerte und Eigenvektoren eines Operators:

Betrachten Sie in einem dreidimensionalen Vektorraum den Operator, der in einer orthonormierten Basis $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$ durch folgende Matrix gegeben ist :

$$H = \frac{\hbar\omega_0}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

a) (4 Punkte) Ist H HERMITEsch? Berechnen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix. (Geben Sie ihre normierte Entwicklung nach den Basisvektoren $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$ an.)

b) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Eigenvektoren den Orthogonalitätsbedingungen und der Vollständigkeitsrelation genügen.

Aufgabe 3 **(10 Punkte)**

δ-Funktions-Doppelmuldenpotential:

Betrachten Sie einen Doppelmulden-Potentialtopf $V(x) = -c[\delta(x) + \delta(x-d)]$, $c > 0$. Lösen Sie die Schrödinger-Gleichung für $E < 0$ und zeigen Sie, dass die Energien der gebundenen Zustände durch $E = -\hbar^2\rho^2/2m$, wobei ρ Lösung der Gleichung

$$e^{-\rho d} = \pm\left(1 - \frac{\rho\hbar^2}{mc}\right) \tag{3}$$

ist, gegeben sind. Finden Sie die Energien aller Eigenzustände für die Grenzfälle $\rho d << 1$ und $\rho d >> 1$. Für welche Abstände d existiert nur ein Eigenzustand mit $E < 0$?