

Aufgabe 4

(9 Punkte)

Messprozess an einem Spin-1/2:

Betrachten Sie ein Teilchen mit Hamiltonoperator

$$H = -\frac{1}{2}\hbar\omega\sigma_z$$

und weiteren Observablen $S_x = \frac{\hbar}{2}\sigma_x$ und $S_z = \frac{\hbar}{2}\sigma_z$ mit

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zur Zeit $t \leq 0$ sei das Teilchen im Grundzustand $|\Psi_0\rangle$.

- (a) (2 Punkte) Was ist der Zustand $|\Psi_0\rangle$? Berechnen Sie $\langle\Psi_0|\sigma_x|\Psi_0\rangle$ und $\langle\Psi_0|\sigma_z|\Psi_0\rangle$.
- (b) (3 Punkte) Bei $t_0 = 0$ wird die Observable S_x gemessen, und zu einem späteren Zeitpunkt $t_1 > 0$ wird eine Messung von S_z vorgenommen. Welche Werte a bzw. b können sich mit welchen Wahrscheinlichkeiten ergeben? Was ist die gemeinsame Wahrscheinlichkeit, bei der ersten Messung a und bei der zweiten Messung b für alle Kombinationen von a und b zu erhalten?
- (c) (2 Punkte) Was sind die Observablen $S_{zH}(t)$ und $S_{xH}(t)$ im Heisenberg-Bild?
- (d) (2 Punkte) Berechnen Sie $\langle\Psi_0|S_{xH}(t_1)S_{xH}(0)|\Psi_0\rangle$ bzw.

$$\frac{1}{2}\langle\Psi_0|S_{xH}(t_1)S_{xH}(0) + S_{xH}(0)S_{xH}(t_1)|\Psi_0\rangle.$$

Aufgabe 5

(6 Punkte)

Messprozess an zwei Spins:

Betrachten Sie ein System von Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen ($i = 1, 2$) mit den 4 Basiszuständen $|+, +\rangle$, $|+, -\rangle$, $|-, +\rangle$, und $|-, -\rangle$, die die gemeinsamen Eigenzustände von $S_{z,1}$ und $S_{z,2}$ bezeichnen. Das System sei zur Zeit $t = 0$ im Zustand

$$|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+, +\rangle + \frac{1}{2}|+, -\rangle + \frac{1}{2}|-, -\rangle.$$

- (a) (3 Punkte) Zur Zeit $t = 0$ werde $S_{1,z}$ gemessen. Was ist die Wahrscheinlichkeit den Messwert $-\hbar/2$ zu erhalten? Was ist der Zustand nach der Messung? Wenn danach $S_{1,x}$ gemessen wird, welche Ergebnisse sind möglich und mit welchen Wahrscheinlichkeiten?
- (b) (3 Punkte) Wenn gleichzeitig $S_{1,z}$ und $S_{2,z}$ gemessen werden, was ist die Wahrscheinlichkeit entgegengesetzte bzw. gleiche Werte zu finden?

bitte wenden

Aufgabe 6

(5 Punkte)

RABI-Oszillationen eines Spins im zeitabhängigen Magnetfeld:

Betrachten Sie einen Spin in einem zeitabhängigen Magnetfeld $\vec{B}(t) = \vec{B}_0 + \vec{B}_1(t)$, das sich aus einem statischen Teil $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$ in z -Richtung und einem zeitlich in der $x-y$ -Ebene rotierenden Anteil $\vec{B}_1(t) = B_1 \{\cos(\omega t) \vec{e}_x - \sin(\omega t) \vec{e}_y\}$ zusammensetzt. Die ZEEMAN-Kopplung $-\mu_B \vec{B} \cdot \vec{\sigma}$ führt auf den HAMILTONoperator

$$H = -\mu_B B_0 \sigma_z - \mu_B B_1 \{\cos(\omega t) \sigma_x - \sin(\omega t) \sigma_y\}.$$

Der statische Anteil B_0 definiert die LARMORfrequenz $\omega_0 = 2\mu_B B_0/\hbar$.

- (a) (1 Punkt) Berechnen Sie die Zeitenentwicklung der Wellenfunktion $\Psi(t)$ für den Fall $B_1 = 0$. Welche Rolle spielt die LARMORfrequenz?
- (b) (3 Punkte) Wir betrachten nun den allgemeinen Fall $B_1 \neq 0$. Transformieren Sie ins mit der Frequenz ω mitrotierende Bezugssystem, indem Sie die zeitabhängige unitäre Transformation $U = e^{\frac{i}{2}\omega t \sigma_z}$ auf die Wellenfunktion und den HAMILTONoperator anwenden. Zeigen Sie, dass die Zeitentwicklung der Wellenfunktion $\Psi'(t) = U^\dagger \Psi(t)$ im mitrotierenden Bezugssystem durch den HAMILTONoperator

$$H' = -\frac{\hbar\Omega}{2} \sigma_x + \frac{\hbar(\omega - \omega_0)}{2} \sigma_z$$

bestimmt wird. Berechnen Sie die sogenannte RABIfrequenz Ω .

- (c) (1 Punkt) Berechnen Sie für den sogenannten Resonanzfall, $\omega = \omega_0$, die Zeitenentwicklung der Wellenfunktion $\Psi'(t)$ direkt durch Lösen der SCHRÖDINGERgleichung im mitrotierenden Bezugssystem. Interpretieren Sie das Ergebnis vom Standpunkt des ursprünglichen Laborsystems aus.

Werbung der Fachschaft Physik:

Vollversammlung

KVV

Semesterticket und Sockelbeitrag

Wie soll es weitergehen? DU entscheidest!

04. November 2008, 14:00 Uhr

Mensa

Alle Anwesenden haben Rederecht!

***UStA**
Uni Karlsruhe