

Prof. Dr. Gerd Schön— Dr. Matthias Eschrig

www-tfp.physik.uni-karlsruhe.de/Lehre/

Vorrechnen: Dienstag, 18.11.2008

Aufgabe 10

(5 Punkte)

Zeitunabhängige entartete Störungstheorie:

Betrachten Sie ein Teilchen mit Spin-1, das durch den Hamiltonoperator

$$H = AS_z^2 + B(S_x^2 - S_y^2)$$

beschrieben werde, wobei S_i jeweils 3x3 Spinmatrizen sind:

$$S_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad S_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- (a) (3 Punkte) Betrachten Sie den Term mit B als Störung, d.h. nehmen Sie an, dass $A \gg B$ gelte. Berechnen Sie das Energiespektrum in erster Ordnung Störungstheorie.
 (b) (2 Punkte) Berechnen Sie das exakte Energiespektrum und vergleichen Sie mit dem Ergebnis der Störungstheorie.

Aufgabe 11

(6 Punkte)

Clebsch-Gordan-Koeffizienten:

Betrachten Sie zwei Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen mit den Gesamtspineigenzuständen $|S, M\rangle$, wobei die vier möglichen Zustände der Singlettzustand mit $S = 0, M = 0$ und die drei Tripletzustände mit $S = 1, M = \{-1, 0, 1\}$ sind. Die Spineigenzustände der einzelnen Teilchen sind $|s_1, m_1\rangle$ und $|s_2, m_2\rangle$ mit $s_i = \frac{1}{2}$ und $m_i = \pm\frac{1}{2}$, wobei $i = 1, 2$.

- (a) (2 Punkte) Drücken Sie die Gesamtspineigenzustände $|S, M\rangle$ durch die Produkt-Spineigenzustände $|s_1, s_2; m_1, m_2\rangle \equiv |s_1, m_1\rangle \otimes |s_2, m_2\rangle$ der einzelnen Teilchen aus. [Hinweis: In Aufgabe 7 haben Sie die Produkt-Eigenzustände

$$\begin{aligned} |+, +\rangle &= \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; +\frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle, & |+, -\rangle &= \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle, \\ |-, +\rangle &= \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle, & |-, -\rangle &= \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \end{aligned}$$

verwendet, um die Singlett- und Tripletzustände auszurechnen.]

- (b) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Koeffizienten $C_{M, m_1, m_2}^{S, s_1, s_2} \equiv \langle s_1, s_2; m_1, m_2 | S, M \rangle$ in der Gleichung

$$|S, M\rangle = \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ [M=m_1+m_2]}} \langle s_1, s_2; m_1, m_2 | S, M \rangle |s_1, s_2; m_1, m_2\rangle \quad (1)$$

wobei m_1 und m_2 über die erlaubten Werte $\pm\frac{1}{2}$ läuft.

- (c) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Koeffizienten $D_{m_1, m_2, M}^{s_1, s_2, S} \equiv \langle S, M | s_1, s_2; m_1, m_2 \rangle$ in der Gleichung

$$|s_1, s_2; m_1, m_2\rangle = \sum_{S, M} \langle S, M | s_1, s_2; m_1, m_2 \rangle |S, M\rangle \quad (2)$$

und zeigen Sie explizit, dass die Gleichung $D_{m_1, m_2, M}^{s_1, s_2, S} = C_{M, m_1, m_2}^{S, s_1, s_2}$ erfüllt ist.

Aufgabe 12**(9 Punkte)**Zeitabhängige Störungstheorie:

Wir wollen hier den Übergang vom 2p zum 1s Niveau des Wasserstoffatoms unter Aussendung von Lichtstrahlung der Frequenz ω betrachten. Fermi's Goldene Regel nimmt in diesem Falle in der sogenannten Dipolnäherung die folgende Form an

$$W_{2p \rightarrow 1s} = \frac{2\pi}{\hbar} \left(\frac{2\pi e^2 \hbar \omega}{V} \right) \left| \langle 21m | \mathbf{er} | 100 \rangle \right|^2 \delta(E_{21m}^{(0)} - E_{100}^{(0)} - \hbar\omega) \quad (3)$$

(hier ist V das Volumen des Systems). Der Einheitsvektor \mathbf{e} ist der Polarisationsvektor des ausgesandten Lichts.

- (6 Punkte) Berechnen Sie das Matrixelement $\langle 21m | \mathbf{er} | 100 \rangle$, welches in die Übergangswahrscheinlichkeit eingeht, für die drei Fälle, dass der Polarisationsvektor in x -, y -, und in z -Richtung zeigt.
- (2 Punkte) Berechnen Sie die Frequenz der ausgesandten Lichtstrahlung.
- (1 Punkt) Wenn wir, anstatt des Übergangs $2p \rightarrow 1s$ einen Übergang $np \rightarrow 1s$ betrachten, für welche Werte der Quantenzahl m kann dann das Matrixelement $\langle n1m | \mathbf{er} | 100 \rangle$ ungleich Null werden?

[Hinweis: Die ungestörten Eigenfunktionen des Wasserstoffatoms sind $\langle r | nlm \rangle_0 = R_{nl}(r) Y_l^m(\vartheta, \varphi)$, und die Energien $E_n^{(0)} = -E_I/n^2$ mit $E_I = me^4/2\hbar^2 = 13.6$ eV. Sie benötigen die radialen Anteile

$$R_{10}(r) = \frac{2}{\sqrt{a_0^3}} e^{-r/a_0} \quad R_{21}(r) = \frac{1}{\sqrt{24a_0^3}} \frac{r}{a_0} e^{-r/2a_0}$$

und die Kugelflächenfunktionen

$$Y_0^0(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \quad Y_1^0(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \vartheta \quad Y_1^{\pm 1}(\vartheta, \varphi) = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \vartheta e^{\pm i\varphi}.$$

Verwenden Sie

$$\mathbf{er} = r (e_x \sin \vartheta \cos \varphi + e_y \sin \vartheta \sin \varphi + e_z \cos \vartheta) \quad (4)$$

und entwickeln Sie $\cos \vartheta$ und $\sin \vartheta e^{\pm i\varphi}$ nach Kugelfunktionen. Für das Winkelintegral ist die Orthogonalitätsrelation der Kugelfunktionen hilfreich.]