

Aufgabe 13

(6 Punkte)

Quanten- i -SWAP:

Betrachten Sie zwei wechselwirkende Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen ($i = 1, 2$) mit folgendem Hamilton-Operator

$$H = -\frac{J}{\hbar^2} (S_{+,1}S_{-,2} + S_{-,1}S_{+,2}), \quad (1)$$

wobei $S_{\pm,j} = S_{x,j} \pm iS_{y,j}$ mit $j = \{1, 2\}$.

- (a) (2 Punkte) Schreiben Sie den Hamiltonoperator als 4x4 Matrix in den vier Basiszuständen $|+, +\rangle$, $|+, -\rangle$, $|-, +\rangle$, und $|-, -\rangle$, die die gemeinsamen Eigenzustände von $S_{z,1}$ und $S_{z,2}$ bezeichnen.
- (b) (3 Punkte) Wir wollen nun den Hamiltonoperator H ein Zeitintervall $t = \tau$ auf einen beliebigen Zustand der beiden Spins wirken lassen und die Zeitentwicklung dieses Zustands betrachten. Bestimmen Sie die 4x4 Zeitenwicklungs-Matrix $U = e^{-iH\tau/\hbar}$ als Funktion des Parameters $\gamma = J\tau/\hbar$.
- (b) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass die Zeitentwicklung, die dem Wert $\gamma = \pi/2$ entspricht, bis auf Vorfaktoren i zum Vertauschen der beiden Spins führt (sogn. i -SWAP-Quantenbit).

Aufgabe 14

(4 Punkte)

Unschärferelation für Spins:

Betrachten Sie einen Spinzustand in der Parametrisierung auf der BLOCH-Kugel:

$$|\Psi\rangle = \exp(i\frac{\alpha}{2}) \left[\cos(\frac{\theta}{2}) \exp(-i\frac{\phi}{2}) |+\rangle + \sin(\frac{\theta}{2}) \exp(i\frac{\phi}{2}) |-\rangle \right]. \quad (2)$$

Zeigen Sie explizit, dass die Unschärferelation

$$\Delta\sigma_x \cdot \Delta\sigma_y \geq \frac{1}{2} |\langle [\sigma_x, \sigma_y] \rangle| \quad (3)$$

mit $\Delta\sigma_i = \sqrt{\langle\sigma_i^2\rangle - \langle\sigma_i\rangle^2}$, $i = \{x, y\}$ erfüllt ist.

Aufgabe 15**(10 Punkte)**

Übergangswahrscheinlichkeiten:

Wir betrachten ein System mit einer zeitabhängigen Störung

$$H = H_0 + V(t), \quad (4)$$

wobei für den zeitunabhängigen Teil H_0 die Eigenwerte und Eigenzustände bekannt seien. In den Vorlesungen haben Sie die Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeit $W_{f \leftarrow i}$ von einem Anfangszustand $|i\rangle$ in einen Endzustand $|f\rangle$ für eine zeitabhängige periodische Störung

$$V(t) = V e^{\epsilon t} e^{-i\omega t} \quad (5)$$

im adiabatischen Limes, $\epsilon \rightarrow 0$, berechnet. Wir betrachten im folgenden den Fall, dass die Matrixelemente $\langle z|V|i\rangle$ für alle Zustände $|z\rangle$ mit $E_z - E_i = \hbar\omega$ verschwinden und somit die ersten nichtverschwindenden Terme in einer Störungsentwicklung von zweiter Ordnung sind.

- (a) (5 Punkte) Wiederholen Sie die Rechnung aus der Vorlesung für den Term zweiter Ordnung im Zeitentwicklungsoperator

$$\left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' V_I(t') V_I(t''), \quad (6)$$

wobei $V_I(t') = e^{iH_0 t'/\hbar} V(t') e^{-iH_0 t'/\hbar}$ die Störung im Wechselwirkungsbild ist. Zeigen Sie, dass

$$W_{f \leftarrow i} = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \sum_z \frac{\langle f|V|z\rangle \langle z|V|i\rangle}{E_z - E_i - \hbar\omega} \right|^2 \delta(E_f - E_i - 2\hbar\omega) \quad (7)$$

gilt, wobei $|i\rangle$, $|f\rangle$ und $|z\rangle$ Eigenzustände von H_0 sind. Die Zustände $|z\rangle$ werden als Zwischenzustände bezeichnet.

- (b) (5 Punkte) Betrachten Sie nun die Störung

$$V(t) = V e^{\epsilon t} \cos(\omega t). \quad (8)$$

im adiabatischen Limes und nehmen Sie an, dass die Matrixelemente $\langle z|V|i\rangle$ für alle Zustände $|z\rangle$ mit $E_z - E_i = \pm\hbar\omega$ verschwinden. Mitteln Sie $W_{f \leftarrow i}$ über eine Schwingungsperiode. Wie lautet für diesen Fall $W_{f \leftarrow i}$? Zeigen Sie dazu, dass im Limes $\epsilon \rightarrow 0$ nur Terme proportional zu $\delta(E_f - E_i \pm 2\hbar\omega)$ und zu $\delta(E_f - E_i)$ übrigbleiben. Interpretieren Sie das Ergebnis, indem Sie Anfangs-, Zwischen- und Endzustände in einem Energieniveauschema graphisch darstellen.