

Prof. Dr. Gerd Schön— Dr. Matthias Eschrig

www-tfp.physik.uni-karlsruhe.de/Lehre/

Vorrechnen: Dienstag, 13.01.2009

[Hinweis: Die erste Klausur findet am Dienstag, dem 16. Dezember, von 17:30-19:30 Uhr im Gaede-Hörsaal statt. Bitte bringen Sie ihren Studentenausweis mit. Als Hilfsmittel ist eine handbeschriebene A4-Seite (einseitig beschrieben) zugelassen. Die Ausgabe der Klausuren erfolgt am 13. Januar 2009 in den Übungen.]

Aufgabe 21

(8 Punkte)

JAYNES-CUMMINGS-Modell:

In der Vorlesung haben Sie den Hamiltonoperator $H = H_0 + H_1$ mit

$$H_0 = \hbar\omega a^\dagger a - \frac{1}{2}\hbar\omega_{eg}\sigma_z, \quad H_1 = \hbar g (\sigma_+ a + \sigma_- a^\dagger) \quad (1)$$

betrachtet.

- (a) (5 Punkte) Leiten Sie die folgenden HEISENBERGSchen Bewegungsgleichungen her:

$$\begin{aligned} \dot{a}(t) &= -i\omega a(t) - ig\sigma_-(t), & \dot{\sigma}_-(t) &= -i\omega_{eg}\sigma_-(t) - ig\sigma_z(t)a(t), \\ \dot{\sigma}_z(t) &= 2ig \{ \sigma_+(t)a(t) - a^\dagger(t)\sigma_-(t) \} \end{aligned} \quad (2)$$

Berechnen Sie $\dot{n}(t)$, wobei $n = a^\dagger a$.

- (b) (3 Punkte) Schreiben Sie den Operator H_1 im Wechselwirkungsbild bezüglich H_0 , d.h. berechnen Sie $e^{iH_0 t/\hbar} H_1 e^{-iH_0 t/\hbar}$.

Aufgabe 22

(8 Punkte)

Atom im Strahlungsfeld:

Wir verallgemeinern nun den Hamiltonoperator der letzten Aufgabe etwas, um die Wechselwirkung eines Atoms (am Platz $\vec{r}_0 = \vec{0}$) mit mehreren Feldmoden mit Wellenvektoren $\vec{k}$ beschreiben zu können: $H' = H'_0 + H'_1$ mit

$$H'_0 = \sum_{\vec{k}} \hbar\omega_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} - \frac{1}{2}\hbar\omega_{eg}\sigma_z, \quad H'_1 = \sum_{\vec{k}} \hbar g_{\vec{k}} (\sigma_+ a_{\vec{k}} + a_{\vec{k}}^\dagger \sigma_-), \quad (3)$$

wobei $g_{\vec{k}}$ reell ist.

- (a) (2 Punkte) Schreiben Sie den Operator H'_1 im Wechselwirkungsbild bezüglich H'_0 , d.h. berechnen Sie $e^{iH'_0 t/\hbar} H'_1 e^{-iH'_0 t/\hbar}$.
- (b) (6 Punkte) Berechnen Sie unter Verwendung der Goldenen Regel der Quantenmechanik die Übergangsraten $\Gamma_{\substack{e \rightarrow g \\ n \rightarrow n'}}$ sowie $\Gamma_{\substack{g \rightarrow e \\ n' \rightarrow n}}$. Die Indizes n und n' symbolisieren hier die Verteilung der Photonenzahlen auf die Moden, $n \equiv \{n_{\vec{k}}\}$, $n' \equiv \{n'_{\vec{k}}\}$. Interpretieren Sie das Ergebnis.

(bitte wenden)

Aufgabe 23**(4 Punkte)**

Vertauschungsrelationen von elektrischen und magnetischen Feldern:

Die elektrischen und magnetischen Felder im SCHRÖDINGER-Bild sind durch

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}, \lambda} \sqrt{2\pi\hbar\omega_{\vec{k}}} \vec{e}_{\vec{k}, \lambda} \left(a_{\vec{k}, \lambda} e^{i\vec{k}\vec{r}} + a_{\vec{k}, \lambda}^{\dagger} e^{-i\vec{k}\vec{r}} \right) \quad (4)$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}, \lambda} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_{\vec{k}}}} \vec{k} \times \vec{e}_{\vec{k}, \lambda} \left(a_{\vec{k}, \lambda} e^{i\vec{k}\vec{r}} + a_{\vec{k}, \lambda}^{\dagger} e^{-i\vec{k}\vec{r}} \right) \quad (5)$$

gegeben. Berechnen Sie den Kommutator

$$[E_x(\vec{r}), B_y(\vec{r}')] \quad (6)$$

für elektrisches und magnetisches Feld.

Aufgabe 24**(4 Punkte)**

Zeitabhängige Dichtematrix:

Gegeben Sei ein HAMILTONoperator in der Form

$$H = \begin{pmatrix} E_a & \Delta(t) \\ \Delta^*(t) & E_b \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Berechnen Sie die zeitabhängige Dichtematrix

$$\hat{\rho}(t) = \begin{pmatrix} \rho_{aa}(t) & \rho_{ab}(t) \\ \rho_{ba}(t) & \rho_{bb}(t) \end{pmatrix} \quad (8)$$

für $\Delta(t) = \Delta_0 e^{-i\omega t}$ mit $\hbar\omega = E_a - E_b$ (dies nennt man den Resonanzfall).**Aufgabe 25****(4 Punkte)**Reduzierte Dichtematrix:Betrachten Sie zwei antiferromagnetisch gekoppelte Spins mit $S = \frac{1}{2}$: $\hat{H} = \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$.

- a) (2 Punkte) Das System sei im Grundzustand. Schreiben Sie die Dichtematrix $\hat{\rho}$ in der Basis $|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle$ auf. Überprüfen Sie explizit, dass es sich bei Ihrem Ergebnis um einen reinen Zustand handelt.
- b) (2 Punkte) Nehmen Sie jetzt an, dass nur der Spin $\vec{S}_1$ als Messgröße interessiert. Bestimmen Sie die reduzierte Dichtematrix, indem Sie den zweiten Spin "ausspüren": $\rho_{\alpha\beta}^{red} = \sum_{\gamma=\uparrow, \downarrow} \rho_{\alpha\gamma, \beta\gamma}$. Zeigen Sie, dass $\hat{\rho}^{red}$ einen gemischten Zustand beschreibt (obwohl $\hat{\rho}$ rein ist).