9. Übung zur Vorlesung Theoretische Physik E: Quantenmechanik II
Universität Karlsruhe WS 2008/09

Prof. Dr. Gerd Schön— Dr. Matthias Eschrig

Vorrechnen: Dienstag, 20.01.2009

Aufgabe 26 **(10 Punkte)**

WIGNER-Verteilungsfunktion:

Die WIGNER-Verteilungsfunktion ist durch die Dichtematrix $\hat{\rho}$ bestimmt, und lautet in einer Dimension

$$P(x,p) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \, \langle x - x'/2|\hat{\rho}|x + x'/2\rangle e^{ipx'/\hbar}. \tag{1}$$

(a) (1 Punkt) Drücken Sie die WIGNER-Verteilungsfunktion für einen reinen Zustand mit der Dichtematrix $\hat{\rho} = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ durch die Wellenfunktion $\Psi(x)$ aus.

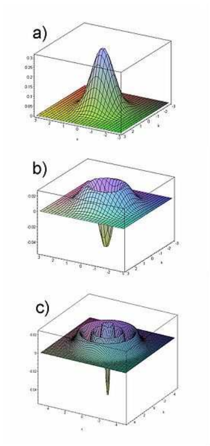
(b) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass wenn der Operator $\hat{A}$ eine beliebige (skalare) Observable beschreibt, der Erwartungswert von $\hat{A}$ durch

$$\langle A\rangle \equiv \mathrm{Tr}(\hat{A}\hat{\rho}) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} \, A(x,p)P(x,p) \tag{2}$$

mit

$$A(x,p) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \langle x - x'/2|\hat{A}|x + x'/2\rangle e^{ipx'/\hbar} \tag{3}$$

gegeben ist. Dies hat die Form eines Erwartungswertes in der klassischen Physik (die "Verteilungsfunktion" ist hier jedoch quantenmechanischer Natur und kann deshalb auch negative Werte annehmen, siehe das Beispiel in der Abbildung rechts.)



WIGNER-Verteilungsfunktion für n-Photonenzustände.
a) n=0, b) $n = 1$, c) $n = 5$.
(Quelle:wikipedia.org).

(c) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass die Dichte $\rho(x) = \langle x|\hat{\rho}|x\rangle$ durch

$$\rho(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} \, P(x,p) \tag{4}$$

gegeben ist.

(d) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Übergangswahrscheinlichkeit zwischen zwei Zuständen Ψ und Φ durch die entsprechenden WIGNER-Verteilungsfunktionen P_Ψ und P_Φ in folgender Weise ausgedrückte werden kann:

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} dx \, \Psi(x)^* \Phi(x)\right|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} \, P_\Psi(x,p)P_\Phi(x,p). \tag{5}$$

(e) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichung für freie Teilchen mittels $P(x,p)$ durch die folgende Gleichung ausgedrückt werden kann:

$$\frac{\partial P(x,p)}{\partial t} + \frac{p}{m}\frac{\partial P(x,p)}{\partial x} = 0. \tag{6}$$

(Diese Gleichung ist analog der für eine klassische Verteilungsfunktion).

Aufgabe 27 **(5 Punkte)**

DIRAC-Matrizen:

In der Vorlesung sind die DIRAC-Matrizen

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^i \\ \sigma^i & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}, \tag{7}$$

eingeführt worden.

(a) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass die Matrizen in Gl. (7) die algebraischen Relationen

$$\alpha^i\alpha^j + \alpha^j\alpha^i = 2\delta^{ij}\mathbf{1}, \qquad \alpha^i\beta + \beta\alpha^i = \mathbf{0}, \qquad (\alpha^i)^2 = \beta^2 = \mathbf{1} \tag{8}$$

erfüllen.

(b) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass aus Gl. (7) und $\gamma^0 = \beta$, $\gamma^i = \beta\alpha^i$, die Darstellung

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^i \\ -\sigma^i & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \qquad \gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \tag{9}$$

folgt sowie die Relation

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}\mathbf{1} \tag{10}$$

mit dem metrischen Tensor $g^{\mu\nu}$ gilt.

Aufgabe 28 **(5 Punkte)**

DIRAC-Gleichung im homogenen Magnetfeld:

Ein Elektron mit der Ladung $q = -e$ und der Ruhemasse m bewege sich in einem homogenen Magnetfeld $\vec{B} = (0, 0, B)$. Dieses Magnetfeld kann durch das Vektorpotential $\vec{A} = (0, Bx, 0)$ beschrieben werden.

(a) (2 Punkte) Schreiben Sie den Spinor Ψ in der DIRAC-Gleichung in der Form $\Psi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$ und leiten Sie aus der zeitunabhängigen DIRAC-Gleichung für ein Elektron im Magnetfeld $\vec{B}$ eine Eigenwertgleichung für den zweikomponentigen Spinor ϕ_1 her, indem Sie den Spinor ϕ_2 eliminieren. Verwenden Sie dazu die Matrizen α^i und β.

(b) (2 Punkte) Lösen Sie diese Eigenwertgleichung mit Hilfe des Ansatzes

$$\phi_1(x, y, z) = \chi_1(x)e^{i(k_y y + k_z z)} \tag{11}$$

und bestimmen Sie die Energieeigenwerte. [Hinweis: Das Eigenwertproblem lässt sich auf die SCHRÖDINGERgleichung für einen verschobenen harmonischen Oszillator zurückführen, deren Lösung Sie als bekannt voraussetzen können.]

(c) (1 Punkt) Welche Energieeigenwerte erhält man im nichtrelativistischen Grenzfall?