

10. Übung zur Vorlesung Theoretische Physik E: Universität Karlsruhe	Quantenmechanik II WS 2008/09
---	--

Prof. Dr. Gerd Schön— Dr. Matthias Eschrig

www-tfp.physik.uni-karlsruhe.de/Lehre/

Vorrechnen: Dienstag, 27.01.2009

[Hinweis: Die zweite Klausur findet am Mittwoch, dem 11. Februar, von 17:30-19:30 Uhr im Audimax statt. Bitte bringen Sie ihren Studentenausweis mit. Als Hilfsmittel ist ein handbeschriebenes A4-Blatt (beidseitig beschrieben) zugelassen. Die Ausgabe der Klausuren erfolgt am 13. Februar 2009 anstatt des Beratungstutoriums im Seminarraum 2.17 des Physikhochhauses.]

Aufgabe 29

(13 Punkte)

LORENTZtransformation von Bilinearformen:

Unter einer LORENTZtransformation transformieren sich die Koordinaten eines Ereignisses (x^μ) und die Dirac-Spinoren (Ψ) gemäß $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$ und $\Psi'(x') = S(\Lambda)\Psi(x)$, mit $S^{-1}\gamma^\mu S = \Lambda^\mu_\nu \gamma^\nu$. Weiterhin sei $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$ und $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. Wir erinnern daran, dass $\det\Lambda = \pm 1$ ist; für Raumspiegelungen ist das Vorzeichen -1 . Zeigen Sie, dass sich die folgenden bilinearen Formen unter (orthochronen) LORENTZtransformationen wie angegeben transformieren wie ein

- (a) (1 Punkt) Skalar:

$$x'^\mu y'_\mu = x^\mu y_\mu \quad (1)$$

- (b) (2 Punkte) Skalar:

$$\bar{\Psi}'(x')\Psi'(x') = \bar{\Psi}(x)\Psi(x) \quad (2)$$

- (c) (2 Punkte) Vektor:

$$\bar{\Psi}'(x')\gamma^\mu\Psi'(x') = \Lambda^\mu_\nu \bar{\Psi}(x)\gamma^\nu\Psi(x) \quad (3)$$

- (d) (3 Punkte) antisymmetrischer Tensor:

$$\bar{\Psi}'(x')\sigma^{\mu\nu}\Psi'(x') = \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma \bar{\Psi}(x)\sigma^{\rho\sigma}\Psi(x) \quad (4)$$

- (e) (4 Punkte) Pseudovektor:

$$\bar{\Psi}'(x')\gamma^5\Psi'(x') = (\det\Lambda)\Lambda^\mu_\nu \bar{\Psi}(x)\gamma^5\gamma^\nu\Psi(x) \quad (5)$$

Zeigen Sie dazu, dass $S^{-1}\gamma^5 S = (\det\Lambda)\gamma^5$.

- (f) (1 Punkt) Pseudoskalar:

$$\bar{\Psi}'(x')\gamma^5\Psi'(x') = (\det\Lambda)\bar{\Psi}(x)\gamma^5\Psi(x). \quad (6)$$

(bitte wenden)

Aufgabe 30**(7 Punkte)**Infinitesimale LORENTZtransformationen:

- (a) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass die N -fache Anwendung der infinitesimalen Drehung im Minkowski-Raum

$$\Lambda = \mathbf{1} + \frac{\vartheta}{N} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

im Limes $N \rightarrow \infty$ auf eine Drehung um die z -Achse mit Drehwinkel ϑ führt.

- (b) (3 Punkte) In der Vorlesung haben Sie die infinitesimale Drehung $\Lambda^\nu_\mu = g^\nu_\mu + \Delta\omega^\nu_\mu$ mit infinitesimalen und antisymmetrischen $\Delta\omega^{\nu\mu}$ betrachtet. Zeigen Sie, dass mit

$$\tau = \frac{1}{8} \Delta\omega^{\mu\nu} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) \quad (8)$$

die Gleichung

$$\gamma^\rho \tau - \tau \gamma^\rho = \Delta\omega^{\rho\nu} \gamma_\nu \quad (9)$$

erfüllt ist.