

## 12. Übung zur Vorlesung Theoretische Physik E: Quantenmechanik II Universität Karlsruhe WS 2008/09

Prof. Dr. Gerd Schön— Dr. Matthias Eschrig

Vorrechnen: Dienstag, 10.02.2009

[Hinweis: Die zweite Klausur findet am Mittwoch, dem 11. Februar, von 17:30-19:30 Uhr im Audimax statt. Bitte bringen Sie ihren Studentenausweis mit. Als Hilfsmittel ist ein handbeschriebenes A4-Blatt (beidseitig beschrieben) zugelassen. Die Ausgabe der Klausuren erfolgt am 13. Februar 2009 anstatt des Beratungstutoriums im Seminarraum 2.17 des Physikhochhauses.]

### Aufgabe 35

(10 Punkte)

KLEIN-Paradoxon:

Betrachten Sie die DIRAC-Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(t, x)}{\partial t} = \left( -i\hbar c \alpha^1 \frac{\partial}{\partial x} + V(x) + mc^2 \beta \right) \Psi(t, x) \quad (1)$$

für ein quantenmechanisches Stufenpotential

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & : x \geq 0 \\ 0 & : x < 0 \end{cases} . \quad (2)$$

Wir betrachten ein einfallenden Teilchens mit Energie  $E > mc^2$ , und wir wollen den speziellen Fall betrachten, dass  $V_0 - E > mc^2$  ist.

(a) (5 Punkte) Zeigen Sie, dass eine Lösung durch

$$\Psi(t, x) = \begin{cases} \Psi_t(t, x) & : x \geq 0 \\ \Psi_{in}(t, x) + \Psi_r(t, x) & : x < 0 \end{cases} \quad (3)$$

mit

$$\Psi_{in}(t, x) = \sqrt{\frac{E + mc^2}{2mc^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{cp}{E + mc^2} \end{pmatrix} \exp\left(\frac{i}{\hbar}(px - Et)\right) \quad (4)$$

$$\Psi_r(t, x) = r \sqrt{\frac{E + mc^2}{2mc^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{cp}{E + mc^2} \end{pmatrix} \exp\left(\frac{i}{\hbar}(-px - Et)\right) \quad (5)$$

$$\Psi_t(t, x) = t \sqrt{\frac{E + mc^2}{2mc^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{cq}{E - V_0 + mc^2} \end{pmatrix} \exp\left(\frac{i}{\hbar}(qx - Et)\right) \quad (6)$$

gegeben ist, wobei  $cp = \sqrt{E^2 - m^2c^4}$ , und  $cq = \sqrt{(E - V_0)^2 - m^2c^4}$ . Berechnen Sie aus der Stetigkeitsbedingung für  $\Psi(t, x)$  bei  $x = 0$  die Reflexions und Transmissionskoeffizienten  $r$  und  $t$ . Was ergibt sich für  $V_0 = 2E$ ?

(b) (5 Punkte) Berechnen Sie die Stromdichten  $j_{in} = \Psi_{in}^\dagger \alpha^1 \Psi_{in}$ ,  $j_r = \Psi_r^\dagger \alpha^1 \Psi_r$ , und  $j_t = \Psi_t^\dagger \alpha^1 \Psi_t$ , sowie die Verhältnisse  $j_r/j_{in}$  und  $j_t/j_{in}$ . Interpretieren Sie das Ergebnis.

**Aufgabe 36****(4 Punkte)**Eichinvarianz der BERRY-Phase:

Wir wollen hier einen weiteren, alternativen, Beweis der Eichinvarianz der BERRY-Phase diskutieren. Diskretisieren Sie dazu eine geschlossene Kurve  $\mathcal{C}$  des Parameters  $\vec{\lambda}$ , mit den diskreten Werten  $\vec{\lambda}_0, \vec{\lambda}_2, \dots, \vec{\lambda}_N, \vec{\lambda}_{N+1} \equiv \vec{\lambda}_0$ . Die BERRY-Phase ist dann durch  $\sum_{i=0}^N [\Delta\phi_n]_{i,i+1}$  gegeben, wobei  $[\Delta\phi_n]_{i,i+1} = \arg\langle\Psi_n(\vec{\lambda}_i)|\Psi_n(\vec{\lambda}_{i+1})\rangle$ . Zeigen Sie (unter Verwendung von  $\sum \ln = \ln \prod$ ), dass dann die BERRY-Phase durch den Ausdruck

$$\gamma_n(\mathcal{C}) = \text{Im} \ln \left\{ \langle\Psi_n(\vec{\lambda}_0)|\Psi_n(\vec{\lambda}_1)\rangle \langle\Psi_n(\vec{\lambda}_1)|\Psi_n(\vec{\lambda}_2)\rangle \cdots \langle\Psi_n(\vec{\lambda}_N)|\Psi_n(\vec{\lambda}_0)\rangle \right\} \quad (7)$$

gegeben ist. Warum ist diese Größe explizit eichinvariant?

**Aufgabe 37****(6 Punkte)**CLEBSCH-GORDAN-Koeffizienten:

Ein Elektron mit Spin  $s = \frac{1}{2}$  habe den Bahndrehimpuls  $l = 1$ . Ermitteln Sie die möglichen Eigenzustände des Gesamtdrehimpulses  $\vec{J} = \vec{S} + \vec{L}$  und berechnen Sie die zugehörigen CLEBSCH-GORDAN-Koeffizienten.

Hinweis: die richtigen Koeffizienten finden Sie z.B. unter

[www.sprace.org.br/PDG/2008/reviews/rpp2008-rev-clebsch-gordan-coefs.pdf](http://www.sprace.org.br/PDG/2008/reviews/rpp2008-rev-clebsch-gordan-coefs.pdf)