

Institut für Theoretische Physik der Universität Karlsruhe
Prof. Dr. F.R. Klinkhamer, Dr. H. Sahlmann

Theoretische Physik E – Quantenmechanik II

Wintersemester 2009/2010

Übungsblatt 1

Abgabe am 26.10.2009, 10:00

Name: _____ Übungsgruppe: _____ Punkte: _____

Aufgabe 1 - Hamiltonsche Mechanik und Hamilton-Jacobi-Gleichung (6 Punkte)

- (a) Beschreiben Sie den eindimensionalen harmonischen Oszillator im Rahmen der Hamiltonschen Mechanik, indem Sie von der Lagrangefunktion

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

ausgehen, geeignete kanonische Variablen und die zugehörige Hamiltonfunktion bestimmen, und die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen aufstellen. (ein Punkt)

Gegeben sei nun eine zeitunabhängige Hamiltonfunktion $H(q, p)$ eines eindimensionalen Systems. Wir betrachten eine Variablentransformation $(q, p) \rightarrow (\tilde{q}, \tilde{p})$, die von einer Funktion $F(q, \tilde{q}, t)$ erzeugt wird, d.h.

$$p = \frac{\partial F}{\partial q}, \quad \tilde{p} = -\frac{\partial F}{\partial \tilde{q}}.$$

- (b) Zeigen Sie unter Verwendung des Prinzips der kleinsten Wirkung, dass die Bewegungsgleichungen in den neuen Variablen wieder die Hamiltonsche Form

$$\dot{\tilde{q}} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}}, \quad \dot{\tilde{p}} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}}$$

haben, wobei die neue Hamiltonfunktion gegeben ist durch

$$\tilde{H} = H + \frac{\partial F}{\partial t}.$$

(2 Punkte)

Besonders interessant ist die Transformation, wenn die resultierende Hamiltonfunktion verschwindet (warum?). In diesem Fall muss für die erzeugende Funktion $S(q, \tilde{q}, t)$ die *Hamilton-Jacobi-Gleichung*

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

gelten.

- (c) Zeigen Sie, dass ein enger Zusammenhang zwischen einer erzeugenden Funktion S die die Hamilton-Jacobi-Gleichung erfüllt, und dem Wirkungsfunktional für das System besteht. Hinweis: Betrachten Sie $d/dt S(q(t), \tilde{q}, t)$. (ein Punkt)
- (d) Für den Fall des harmonischen Oszillators aus (a), definieren Sie eine Funktion $\Psi = \Psi_0 \exp(iS/X)$, wobei X zunächst ein freier Parameter mit Einheit $E \cdot t$ ist. Unter der Annahme dass S die Hamilton-Jacobi-Gleichung erfüllt, leiten Sie eine

Differentialgleichung für Ψ ab, und vergleichen Sie diese mit der Schrödinger-Gleichung für den harmonischen Oszillator.¹ (2 Punkte)

Aufgabe 2 - Die „alte Quantentheorie“ von Bohr und Sommerfeld (4 Punkte)

In der „alten Quantentheorie“ ging man davon aus, dass ein Teilchen den gewöhnlichen klassischen Trajektorien folgt, aber nur gewisse Trajektorien erlaubt sind. Dadurch kommt es zu einer Quantisierung physikalischer Größen. Für periodische Systeme lautet die Quantisierungsbedingung für erlaubte Trajektorien

$$S := \oint p \, dq = 2\pi n \hbar \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Das Integral erstreckt sich hier über eine volle Periode.

- (a) Begründen Sie, dass S die von der Bahn eingeschlossene Fläche im Phasenraum ist. (ein Punkt)
- (b) Welche möglichen Energiewerte ergeben sich für den harmonischen Oszillator aus Aufgabe 1(a)? (ein Punkt)

Betrachten Sie nun ein Teilchen in der Ebene mit rotationssymmetrischem Potential.

- (c) Schreiben Sie die Lagrangefunktion in Polarkoordinaten (r, φ) auf. Bestimmen Sie den zu φ konjugierten Impuls p_φ und zeigen Sie, dass dieser konstant ist. (ein Punkt)
- (d) Wenden Sie obige Quantisierungsbedingung auf die vorliegende Situation an. Was ist die physikalische Interpretation von p_φ und dessen Quantisierung? (ein Punkt)

¹Sie werden feststellen, dass die Gleichung für die Wahl $X = \hbar$ ähnlich sind. Dies kann mithilfe der WKB-Approximation erklärt werden, die Sie in der Vorlesung kennenlernen werden.