Institut für Theoretische Physik der Universität Karlsruhe
Prof. Dr. F.R. Klinkhamer, Dr. H. Sahlmann

# Theoretische Physik E – Quantenmechanik II

Wintersemester 2009/2010

Übungsblatt 2 Abgabe am 2.11.2009, 10:00

Name: ______________________________ Übungsgruppe: ______ Punkte: ______

**Hinweis**: Die Vorlesung am Freitag den 30.10.2010 fällt aus.

**Aufgabe 3** - Klassischer Limes der Schrödingergleichung (6 Punkte)

In dieser Aufgabe untersuchen wir den Zusammenhang zwischen WKB-Näherung und klassischem Limes. Wir betrachten dazu ein Teilchen der Masse $m$ im dreidimensionalen Raum, unter Einfluss eines Potentials $V(\vec{x})$.

**(a)** Machen Sie den Ansatz $\Psi(\vec{x},t) = A(\vec{x},t)\exp(iS(\vec{x},t)/\hbar)$ für einen Zustand des Teilchens (in der Ortsraumdarstellung). $A$ und $S$ sind dabei zwei *reelle* Funktionen. Zeigen Sie, dass die folgenden Gleichungen äquivalent zur Schrödingergleichung für das Teilchen sind:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}(\vec{\nabla}S)\cdot(\vec{\nabla}S) + V = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\Delta A}{A} \tag{1}$$

$$m\frac{\partial A}{\partial t} + (\vec{\nabla}A)\cdot(\vec{\nabla}S) + \frac{1}{2}A\Delta S = 0. \tag{2}$$

(*2 Punkte*)

**(b)** Betrachten Sie zunächst Gleichung (2): Führen Sie die Größen $\rho = mA^2$ und $\vec{p} = A^2\vec{\nabla}S$ ein, und zeigen Sie dass sich (2) auch so schreiben lässt:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \vec{\nabla}\cdot\vec{p} = 0. \tag{3}$$

Was ist die Bedeutung von $\rho$, $\vec{p}$ und (3) in der Quantenmechanik? (*ein Punkt*)

**(c)** Nun betrachten wir den klassischen Limes der Gleichungen (1) und (2). Geben Sie zunächst eine *klassische* Interpretation für $\rho$, $\vec{p}$ und (3). Nehmen Sie dann den Limes $\hbar \to 0$ von Gleichung (1), und zeigen Sie dass in diesem Limes die Gleichung

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} \equiv m\left(\frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\right)\vec{v} = -\vec{\nabla}V$$

folgt. $\vec{v}$ ist hier definiert als $\vec{v} = \vec{p}/\rho$. (*2 Punkte*)

**(d)** Zeigen Sie dass der klassische Limes von (1) auch äquivalent zur Hamilton-Jacobi-Gleichung für das Teilchen ist. (*ein Punkt*)

**Aufgabe 4** - Durchgang durch einen Potentialwall in WKB-Näherung (9 Punkte)

Gegeben sei ein Potential $V(x)$ in einer Dimension mit den folgenden Eigenschaften: $V(x)$ geht für $|x| \to \infty$ gegen Konstanten, ist überall nichtnegativ, und hat nur ein Maximum. Betrachten Sie ein Teilchen mit der Energie $E$ und der Masse $m$ in diesem Potential. $E$ sei so, dass $E > V(x)$ für $x < a$ und für $x > b$, sowie $E < V(x)$ für $a < x < b$, d.h. $a$ und $b$ sind die Umkehrpunkte des klassischen Problems. Wir vereinbaren auch noch folgende Bezeichnungen: Die Bereiche I, II, und III auf der $x$-Achse seien gegeben durch $x \ll a$ (I), $a < x < b$ (II), und $x \gg b$ (III).

**(a)** Machen Sie für den Bereich III den Ansatz einer transmittierten (d.h. in Richtung größer werdendem $x$ laufenden) Welle für die Wellenfunktion. Bestimmen Sie die Wellenfunktion im Bereich II mit Hilfe der Anschlussbedingung

$$\sqrt{l} \sin\phi \exp\left(\int_x^b \frac{dx'}{l}\right) \leftarrow \sqrt{\lambda} \cos\left(\int_b^x \frac{dx'}{\lambda} - \frac{\pi}{4} + \phi\right), \tag{4}$$

wobei $\lambda = \hbar/\sqrt{2m(E - V(x))}$ und $l = \hbar/\sqrt{2m(V(x) - E)}$. (*2 Punkte*)

**(b)** Bestimmen Sie, basierend auf dem Resultat aus (a), nun analog die Wellenfunktion im Bereich I. Verwenden Sie hier die Anschlussbedingung

$$\sqrt{\lambda} \cos\left(\int_x^a \frac{dx'}{\lambda} - \frac{\pi}{4}\right) \leftarrow \frac{1}{2}\sqrt{l} \exp\left(-\int_a^x \frac{dx'}{l}\right). \tag{5}$$

Schreiben Sie die Wellenfunktion in Bereich I als Überlagerung einer nach rechts und nach links laufenden Welle. (*3 Punkte*)

**(c)** Berechnen Sie mit Hilfe obiger Resultate und unter der vereinfachenden Annahme $\lambda(+\infty) = \lambda(-\infty)$ den Transmissionkoeffizienten $T_{WKB}$ und den Reflexionskoeffizienten $R_{WKB}$ in der WKB-Näherung. Wie lässt sich das Ergebnis für die Summe beider Koeffizienten für den Gültigkeitsbereich der WKB-Näherung interpretieren? (*2 Punkte*)

Der radioaktive $\alpha$-Zerfall soll durch das Tunneln von $\alpha$-Teilchen mit Bahndrehimpuls $l = 0$ durch die Potentialbarriere

$$V(r) = \frac{ZZ'e^2}{r}, \qquad r > R \tag{6}$$

beschrieben werden, wobei $Z$ die Kernladungszahl, $Z' = 2$, $R$ der Kernradius, $e$ die Elementarladung und $r$ der Abstand vom Zentrum des Kerns ist. Die Zerfallswahrscheinlichkeit ist proportional zum Transmissionkoeffizienten $T = \exp(-G)$.

**(d)** Bestimmen Sie den sogenannte Gamov-Faktor $G$ in der WKB-Näherung. Hinweis: Gehen Sie vom Radialteil der Schrödingergleichung aus und bestimmen Sie zunächst die (eindimensionale!) Schrödingergleichung für die reduzierte Wellenfunktion $u(r) = r\Psi(r)$. (*2 Punkte*)