Institut für Theoretische Physik der Universität Karlsruhe
Prof. Dr. F.R. Klinkhamer, Dr. H. Sahlmann

Theoretische Physik E – Quantenmechanik II

Wintersemester 2009/2010

Übungsblatt 4 Abgabe am 16.11.2009, 10:00

Name: ______________________ Übungsgruppe: ______ Punkte: ______

Aufgabe 7 - Cauchy-Schwarz-Ungleichung (6 Punkte)

In dieser Aufgabe wollen wir die Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|\langle u \,|\, v\rangle|^2 \leq \langle u \,|\, u\rangle\langle v \,|\, v\rangle \tag{1}$$

für beliebige Vektoren u, v eines Hilbert-Raumes $(\mathcal{H}, \langle\cdot\,|\,\cdot\rangle)$ beweisen und eine wichtige Anwendung betrachten.

(a) Gegeben u, v im Hilbert-Raum $(\mathcal{H}, \langle\cdot\,|\,\cdot\rangle)$, beweisen Sie (1). Hinweis: Betrachten Sie das Normquadrat $\langle\Psi\,|\,\Psi\rangle$ des Vektors $\Psi = u+\lambda v$, wobei $\lambda \in \mathbb{C}$, und bestimmen Sie λ so, dass dieses minimal wird. (*2 Punkte*)

(b) Zeigen Sie: Wenn in (1) Gleichheit gilt, dann folgt: Entweder einer der beiden Vektoren u, v ist der Nullvektor, oder die Vektoren sind linear abhängig. (*ein Punkt*)

Nun wollen wir die Cauchy-Schwarz-Ungleichung dazu benutzen, die Unschärferelation zu beweisen. Gegeben seien dazu zwei hermitesche Operatoren A und B auf einem Hilbert-Raum $(\mathcal{H}, \langle\cdot\,|\,\cdot\rangle)$, sowie ein beliebiger Zustand Ψ aus $\mathcal{H}$. Wir definieren auch noch die Operatoren

$$\Delta^2 A := (A - \langle\Psi\,|\,A\,|\,\Psi\rangle\,\mathbb{I})^2\,, \qquad \Delta^2 B := (B - \langle\Psi\,|\,B\,|\,\Psi\rangle\,\mathbb{I})^2\,, \tag{2}$$

wobei wir mit $\mathbb{I}$ den Einheitsoperator bezeichnet haben.

(c) Zeigen Sie mithilfe der Cauchy-Schwarz-Ungleichung, dass

$$|\langle\Psi\,|\,[A, B]\,|\,\Psi\rangle|^2 \leq 4\langle\Psi\,|\,\Delta^2 A\,|\,\Psi\rangle\langle\Psi\,|\,\Delta^2 B\,|\,\Psi\rangle. \tag{3}$$

Hinweis: Zeigen Sie (3) zunächst für den Fall, dass $\langle\Psi\,|\,A\,|\,\Psi\rangle = \langle\Psi\,|\,B\,|\,\Psi\rangle = 0$ und führen Sie den allgemeineren Fall dann auf diesen speziellen zurück. (*2 Punkte*)

(d) Zeigen Sie, dass die Heisenbergsche Unschärferelation für den Ort und den Impuls eines Teilchens ein Spezialfall von (3) ist. (*ein Punkt*)

Aufgabe 8 - Einige Fingerübungen auf $l^2(\mathbb{C})$ (5 Punkte)

Sei $\mathcal{H}'$ der lineare Raum der endlichen komplexwertigen Linearkombinationen von Kets $|n\rangle$, $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Durch $\langle m|n\rangle = \delta_{m,n}$ und lineare Fortsetzung auf Linearkombinationen wird auf diesem Raum ein Skalarprodukt definiert.

(a) Finden Sie eine Cauchy-Folge in diesem Raum, deren Grenzwert nicht in $\mathcal{H}'$ enthalten ist. Beweisen Sie ihre Aussage. (*2 Punkte*)

Der Abschluss dieses Raumes ist ein Hilbert-Raum $\mathcal{H}$ der auch häufig auch mit $l^2(\mathbb{C})$ bezeichnet wird. Seine Elemente sind (nicht notwendigerweise endliche) Linearkombinationen mit quadratsummierbaren Koeffizienten,

$$\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n |n\rangle, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty. \tag{4}$$

Das Skalarprodukt wird genauso definiert wie oben für $\mathcal{H}'$ beschrieben. Wir betrachten den Operator a auf $\mathcal{H}$, definiert durch $a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$.

(c) Berechnen Sie die Wirkung des adjungierten Operators $a^\dagger$, sowie die der Operatoren $a^\dagger a$ und $aa^\dagger$. (*ein Punkt*)

(d) Jeweils mit Begründung: Sind die Operatoren a, $a^\dagger$, $a^\dagger a$, $aa^\dagger$ invertierbar? Sind sie hermitesch? Sind sie positiv? (*2 Punkte*)

Aufgabe 9 - Funktionen hermitescher Operatoren (4 Punkte)

Gegeben sei ein hermitescher Operator A auf einem Hilbert-Raum $(\mathcal{H}, \langle\cdot|\cdot\rangle)$, dessen Eigenvektoren eine Basis von $\mathcal{H}$ bilden.

(a) Zeigen Sie, dass A^n mit $n \in \mathbb{N}$ wieder ein hermitescher Operator ist und drücken Sie dessen Eigenwerte und Eigenvektoren durch die von A aus. (*ein Punkt*)

(b) Für eine Funktion $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, analytisch auf ganz $\mathbb{R}$, definieren Sie den Operator

$$f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n A^n \tag{5}$$

und drücken Sie dessen Eigenwerte und Eigenvektoren durch die von A aus. Hinweis: Sie brauchen sich hier keine Gedanken darüber zu machen, in welchem Sinne die Reihe (5) kovergiert. (*ein Punkt*)

(c) Zeigen Sie für zwei analytische (auf ganz $\mathbb{R}$) Funktionen $f(x)$, $g(x)$, dass $f(A)g(A) = g(A)f(A) = fg(A)$. Machen Sie sich wiederum keine Gedanken über Konvergenz. (*ein Punkt*)

(d) Bestimmen Sie den adjungierten Operator zu $U_t := \exp[itA]$, $t \in \mathbb{R}$, berechnen Sie $U_t U_{t'}$ und zeigen Sie, dass alle U_t, $t \in \mathbb{R}$, unitär sind. (*ein Punkt*)