Institut für Theoretische Physik der Universität Karlsruhe
Prof. Dr. F.R. Klinkhamer, Dr. H. Sahlmann

Theoretische Physik E – Quantenmechanik II

Wintersemester 2009/2010

Übungsblatt 5 Abgabe am 23.11.2009, 10:00

Name: ______________________ Übungsgruppe: ______ Punkte: ______

Aufgabe 10 - Projektoren und Dichtematrizen (11 Punkte)

Zunächst untersuchen wir die Eigenschaften von Projektionsoperatoren (kurz: Projektoren), d.h. von hermiteschen Operatoren P mit $P^2 = P$ auf einem Hilbert-Raum $\mathcal{H}$.

(a) Zeigen Sie: Sei $|\,\psi\rangle$ ein normierter Vektor aus $\mathcal{H}$, dann ist der Operator $|\,\psi\rangle\langle\,\psi|$ mit der Wirkung

$$|\,\phi\rangle \longmapsto \langle\psi\,|\,\phi\rangle\,|\,\psi\rangle \tag{1}$$

ein Projektor. Zeigen Sie dann: Jeder Projektionsoperator lässt sich als Summe von Projektoren der Form (1) schreiben. (*ein Punkt*)

(b) Sei $\{|\,\psi_n\rangle\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$. Zeigen Sie dass

$$\sum_n |\,\psi_n\rangle\langle\,\psi_n| = \mathbb{I}\,. \tag{2}$$

(*ein Punkt*)

Sei wiederum $\{|\,\psi_n\rangle\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$. Die *Spur* (auf Englisch: 'trace') eines Operators A ist definiert als

$$\mathrm{tr}\,A = \sum_n \langle\psi_n\,|\,A\,|\,\psi_n\rangle. \tag{3}$$

(c) Zeigen Sie: Die Spur eines Operators ist unabhängig von der Orthonormalbasis die zur Berechnung verwendet wird. (*ein Punkt*)

(d) Zeigen Sie: Für beliebige Operatoren A, B gilt: $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$. (*ein Punkt*)

In Anwendungen der Quantenmechanik tritt häufig die Situation auf, dass man nicht nur ein Teilchen in einem bestimmten Zustand, sondern eine große Anzahl von Teilchen in verschiedenen Zuständen beschreiben möchte. Teilchen in einem Teilchenstrahl können zum Beispiel verschiedene Spinrichtungen, Atome in einem Behälter verschiedene Anregungszustände haben. Ein solches System, in dem schon die Präparation des Ausgangszustandes statistisch verteilt ist, beschreibt man mit Hilfe eines *Dichteoperators*. Sei w_i der Anteil der Teilchen eines Ensembles, die sich im Quantenzustand $|\,\psi_i\rangle$ befinden, so ist der Dichteoperator gegeben durch

$$\rho := \sum_i w_i |\,\psi_i\rangle\langle\,\psi_i|. \tag{4}$$

Selbstverständlich muss $\sum_i w_i = 1$ sein. Die Zustände $|\,\psi_i\rangle$ sollen normiert sein, ansonsten aber beliebig. Insbesondere brauchen sie nicht linear unabhängig zu sein.

(e) Wird an einem solchen Ensemble die Messung einer Observablen A vorgenommen, so bezeichnen wir das Resultat (also den Mittelwert aus der Messung an den verschiedenen Komponenten) mit $[A]$. Zeigen Sie

$$[A] = \mathrm{tr}(\rho A). \tag{5}$$

(*ein Punkt*)

(f) Zeigen Sie, dass für die Spur eines Dichteoperators gilt: $\mathrm{tr}(\rho) = 1$. Zeigen Sie auch: Ist $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ für einen normierten Vektor $|\psi\rangle$, so ist $\mathrm{tr}(\rho A) = \langle\psi|A|\psi\rangle$ für beliebige Operatoren A. (*ein Punkt*)

(g) Zeigen Sie: Jede positiv definite hermitesche $N \times N$-Matrix ρ mit $\mathrm{tr}(\rho) = 1$ ist ein Dichteoperator. (*ein Punkt*)

Der Dichteoperator für ein Vielteilchensystem, das durch Kontakt mit einem Wärmereservoir auf einer konstanten Temperatur T gehalten wird (*kanonisches Ensemble*), hat die Form

$$\rho = \left[\mathrm{tr}\left(e^{-\frac{H}{k_B T}}\right)\right]^{-1} e^{-\frac{H}{k_B T}}, \tag{6}$$

wobei H der Einteilchen-Hamiltonoperator und k_B die Bolzmann-Konstante ist. Betrachten Sie den Fall, dass H der Hamilton-Operator des harmonischen Oszillators ist:

(h) Berechnen Sie $[H]$. Vergleichen Sie das Resultat mit der Planckschen Strahlungsformel. Mit welcher Wahrscheinlichkeit liefert eine Energiemessung den Wert $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$? Was geschieht im Limes $T \to 0$? (*4 Punkte*)

Aufgabe 11 - Observablen am Zweiteilchensystem (4 Punkte)

Betrachten Sie zunächst ein Teilchen in einer Dimension. Der Zustandsraum des Teilchens ist $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}, dx)$.

(a) Geben Sie die zu den folgenden experimentellen Fragestellungen gehörenden hermiteschen Operatoren an: i) Befindet sich das Teilchen im Intervall $[0, 1]$? ii) Befindet sich das Teilchen im Intervall $[0, 1]$ oder im Intervall $[2, 3]$? iii) Befindet sich das Teilchen im Intervall $[0, 1]$ und im Intervall $[2, 3]$? (*2 Punkte*)

Betrachten Sie nun *zwei* nicht miteinander wechselwirkende Teilchen in einer Dimension. Der Zustandsraum des Teilchenpaares ist $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$.

(b) Geben Sie die zu den folgenden experimentellen Fragestellungen gehörenden hermiteschen Operator an: i) Befindet sich Teilchen 1 im Intervall $[0, 1]$ oder Teilchen 2 im Intervall $[2, 3]$? ii) Befindet Teilchen 1 im Intervall $[0, 1]$ und Teilchen 2 im Intervall $[2, 3]$? iii) Befindet sich ein Teilchen im Intervall $[0, 1]$ und das andere im Intervall $[2, 3]$? (*2 Punkte*)