Institut für Theoretische Physik der Universität Karlsruhe
Prof. Dr. F.R. Klinkhamer, Dr. H. Sahlmann

Theoretische Physik E – Quantenmechanik II

Wintersemester 2009/2010

Übungsblatt 6 — Abgabe am 30.11.2009, 10:00

Name: ______________________ Übungsgruppe: ______ Punkte: ______

Aufgabe 12 - Das Feynmansche Pfadintegral in der Quantenmechanik (7 Punkte)

Wir betrachten ein Teilchen der Masse m in einer Dimension, welches sich unter dem Einfluss eines Potentials $V(x)$ bewegt. Für dieses Teilchen untersuchen wir das Matrixelement

$$U(x_b, x_a, t_b - t_a) := \langle x_b \,|\, \widehat{U}(t_b - t_a) \,|\, x_a \rangle, \qquad \widehat{U}(\Delta t) = \exp(-\frac{i}{\hbar}\widehat{H}\Delta t), \tag{1}$$

wobei $\{|\,x\rangle\}$ die (uneigentlichen) Eigenzustände des Ortsoperators $\widehat{x}$, sowie x_a, x_b zwei beliebige Orte und $t_a \leq t_b$ zwei Zeitpunkte sind. $\widehat{H}$ ist der Hamiltonoperator des Teilchens.

(a) Geben Sie eine physikalische Interpretation von $U(x_b, x_a, t_b - t_a)$ an. (*ein Punkt*)

R.P. Feynman fand in den 40er Jahren des letzten Jahrhunderts eine Darstellung des Matrixelementes (1) durch ein *Pfadintegral*,[1]

$$U(x_b, x_a, t_b - t_a) = \int\limits_{\substack{x(t_a)=x_a \\ x(t_b)=x_b}} D[x(t)]\, e^{iS[x(t)]/\hbar}, \qquad S[x(t)] = \int_{t_a}^{t_b} dt\, \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x)\right). \tag{2}$$

Hier steht $D[x(t)]$ für ein bestimmtes Maß auf dem Raum der Teilchentrajektorien ('Pfade') $x(t)$. Es wird nur über solche Trajektorien integriert, die die Randbedingungen $x(t_a) = x_a$, $x(t_b) = x_b$ erfüllen. Ansonsten sind die Trajektorien aber beliebig, insbesondere müssen Sie nicht die klassischen Bewegungsgleichungen erfüllen.
Wir wollen diese Pfadintegraldarstellung plausibel machen. Sei dazu $N \in \mathbb{N}$ und $\epsilon = (t_b - t_a)/(N+1)$. Dann kann man schreiben

$$U(x_b, x_a, t_b - t_a) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx_1 \ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx_N\; U(x_b, x_N, \epsilon)U(x_N, x_{N-1}, \epsilon) \ldots U(x_1, x_a, \epsilon). \tag{3}$$

(b) Zeigen Sie (3). (*ein Punkt*)

(c) Nun betrachten wir $U(x_n, x_{n-1}, \epsilon)$ für kleines ϵ. Zeigen Sie

$$U(x_n, x_{n-1}, \epsilon) \approx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} \exp\left[\frac{i}{\hbar}p(x_n - x_{n-1}) - \frac{i}{\hbar}\epsilon(\frac{p^2}{2m} + V(x_n))\right], \tag{4}$$

indem Sie die Exponentialfunktion entwickeln und höhere Ordnungen in ϵ vernachlässigen. (*2 Punkte*)

[1] Diese Darstellung von Übergangsamplituden durch Pfadintegrale ist von großer Bedeutung in der Physik. Sie ist allerdings nicht mathematisch rigoros, und einige Fragestellungen, z.B. im Zusammenhang mit Unitarität, lassen sich nicht mit ihr untersuchen.

(d) Zeigen Sie weiter

$$U(x_n, x_{n-1}, \epsilon) \approx \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\epsilon}}\, e^{\frac{i}{\hbar}\epsilon\left[\frac{m}{2}\left(\frac{x_n - x_{n-1}}{\epsilon}\right)^2 - V(x_n)\right]}, \tag{5}$$

wobei $\sqrt{i} = \exp(i\pi/4)$. Hinweis: Sie können

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[i\frac{a}{2}x^2\right] = \frac{1}{\sqrt{i|a|}} \qquad \text{für } a < 0 \tag{6}$$

verwenden. (*2 Punkte*)

(e) Machen Sie unter Verwendung der bisherigen Resultate eine Darstellung der Form (2) plausibel. Hinweis: Betrachten Sie den Limes $N \to \infty$. (*ein Punkt*)

Aufgabe 13 - Neutrino-Oszillationen (5 Punkte)

Neutrinos können von einem Wechselwirkungs-Eigenzustand (*Flavor*) in einen anderen übergehen. Dies hängt damit zusammen, dass die Neutrinos Massen besitzen, und die Masse-Eigenzustände keine Flavor-Eigenzustände sein müssen. Wir wollen hier zur Vereinfachung nur zwei Neutrino-Flavors ν_a, ν_b betrachten. Für den Zusammenhang zwischen Flavor-Eigenzuständen $|\nu_a\rangle, |\nu_b\rangle$ und den Masse-Eigenzuständen $|\nu_1\rangle, |\nu_2\rangle$ kann man dann schreiben:

$$|\nu_a\rangle = \cos\theta|\nu_1\rangle + \sin\theta|\nu_2\rangle, \qquad |\nu_b\rangle = -\sin\theta|\nu_1\rangle + \cos\theta|\nu_2\rangle. \tag{7}$$

Der Winkel θ wird auch als *Mischungswinkel* bezeichnet. Die Wahrscheinlichkeit einer Flavoränderung lässt sich für ultrarelativistische Neutrinos wie folgt berechnen:

$$P_{a\to b} = \sin^2(2\theta)\sin^2\left(\frac{c^3\Delta m^2 L}{4\hbar E_\nu}\right). \tag{8}$$

Hierbei ist $\Delta m^2 = m_1^2 - m_2^2$ die Differenz der Quadrate der Neutrinomassen, L die Flugdistanz zwischen Erzeugung (im Flavor-Eigenzustand $|\nu_a\rangle$) und Beobachtung der Neutrinos, und E_ν ist die Neutrinoenergie. Zeigen Sie (8).
Hinweis: Geben Sie die Wahrscheinlichkeit $P_{a\to b}$ zunächst als Funktion von $(E_1 - E_2)$ und t an. Benutzen Sie für die weitere Rechnung, dass die Neutrinos nahezu mit Lichtgeschwindigkeit fliegen, und nähern Sie in der Beziehung $E_i = \sqrt{m_i^2c^4 + \vec{p}^2c^2}$ geeignet im ultrarelativistischen Limes – bis zur ersten Ordnung in der Energiedifferenz, ansonsten bis zur führenden Ordnung.

Bemerkung: Einen experimentellen Hinweis auf eine nichttriviale L/E-Abhängigkeit der Überlebenswahrscheinlichkeit $P_{a\to a} = 1 - P_{a\to b}$ finden Sie in S. Abe *et al.*, "Precision Measurement of Neutrino Oscillation Parameters with KamLAND," Phys. Rev. Lett. **100** (2008) 221803. Aus dieser Veröffentlichung haben wir Figur 3 auf der rechten Seite reproduziert.