Institut für Theoretische Physik der Universität Karlsruhe
Prof. Dr. F.R. Klinkhamer, Dr. H. Sahlmann

Theoretische Physik E – Quantenmechanik II

Wintersemester 2009/2010

Übungsblatt 7 Abgabe am 7.12.2009, 10:00

Name: ______________________________ Übungsgruppe: _____ Punkte: _____

Aufgabe 14 - Darstellungen von Lie-Algebren (7 Punkte)

Eine reelle Lie-Algebra $\mathcal{L}$ ist ein reeller Vektorraum in dem eine zusätzliche Verknüpfung $[\cdot,\cdot]:\mathcal{L}\times\mathcal{L}\to\mathcal{L}$ definiert ist, die die folgenden Eigenschaften hat:

$$[a,b] = -[b,a] \tag{1}$$

$$[\lambda_1 a + \lambda_2 b, c] = \lambda_1 [a,c] + \lambda_2 [b,c] \tag{2}$$

$$[a,[b,c]] + [b,[c,a]] + [c,[a,b]] = 0 \tag{3}$$

mit $a, b, c \in \mathcal{L}$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

(a) Die Algebra mit der Basis l_1, l_2, l_3 und der Verknüpfung

$$[l_i, l_j] = \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} l_k \tag{4}$$

(und bilinear fortgesetzt auf beliebige Elemente[1]) wird mit so(3) bezeichnet. Zeigen Sie: so(3) ist eine Lie-Algebra. (*ein Punkt*)

(b) Geben Sie ein weiteres Beispiel (mit Begründung) für eine Lie-Algebra an. (*ein Punkt*)

Eine *Darstellung* einer Lie-Algebra auf einem Vektorraum V ist eine lineare Abbildung $\pi : \mathcal{L} \to \mathrm{gl}(V)$ (wobei $\mathrm{gl}(V)$ den Raum der Operatoren auf V bezeichnet) mit der Eigenschaft

$$\pi([a,b]) = \pi(a)\pi(b) - \pi(b)\pi(a) \equiv [\pi(a), \pi(b)] \quad \text{für alle } a, b \in \mathcal{L}. \tag{5}$$

Die Darstellung heisst irreduzibel, falls V keinen echten Unterraum U mit $\pi(\mathcal{L})U \subseteq U$ besitzt.

(c) Betrachten Sie die lineare Abbildung $\pi_1 : \mathrm{so}(3) \to \mathfrak{gl}(\mathbb{C}^2)$ die durch $\pi_1(l_k) = -\frac{i}{2}\sigma_k$ definiert ist, wobei σ_i die Pauli-Matrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

bezeichnet. Zeigen Sie dass π_1 eine Darstellung von so(3) ist. Ist sie irreduzibel? (*ein Punkt*)

[1] Hier und im folgenden geben wir also nur die Wirkung von (multi-)linearen Abbildungen auf einer Basis an. Wie Sie wissen, kann man daraus die Wirkung der Abbildung auf beliebige Linearkombinationen rekonstruieren. Beispiel:

$$[l_i, l_j] = \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} l_k \quad \Rightarrow \quad [\sum_i c_i l_i, \sum_j d_j l_j] = \sum_{ijk} c_i d_j \epsilon_{ijk} l_k.$$

(d) Betrachten Sie die lineare Abbildung $\pi_2 : \mathrm{so}(3) \to \mathfrak{gl}(\mathrm{so}(3))$ die durch $\pi_2(l_j)l_k = [l_j, l_k]$ definiert wird. Zeigen Sie dass π_2 eine Darstellung von $\mathrm{so}(3)$ ist. Ist sie irreduzibel? (*ein Punkt*)

(e) Betrachten Sie die lineare Abbildung $\pi_3 : \mathrm{so}(3) \to \mathfrak{gl}(L^2(\mathbb{R}^3, d^3x))$ die durch $\pi_3(l_k) = -\frac{i}{\hbar}L_k$ definiert wird, wobei L_i die Komponenten des Drehimpulsoperators $\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p}$ sind. Zeigen Sie dass π_3 eine Darstellung von $\mathrm{so}(3)$ ist. Ist sie irreduzibel? (*ein Punkt*)

Es seien nun zwei Darstellungen π_1 auf V_1 und π_2 auf V_2 einer Lie-Algebra $\mathcal{L}$ gegeben.

(f) Zeigen Sie, dass $\pi_\otimes(l) := \pi_1(l) \otimes \mathbb{I}_{V_2} + \mathbb{I}_{V_1} \otimes \pi_2(l)$ eine Darstellung von $\mathcal{L}$ auf $V_1 \otimes V_2$ ist. (*ein Punkt*)

(g) Zeigen Sie, dass $\pi_\oplus(l) := \pi_1(l) \oplus \pi_2(l)$ eine Darstellung von $\mathcal{L}$ auf $V_1 \oplus V_2$ ist. (*ein Punkt*)

Aufgabe 15 - Die irreduziblen Darstellungen von so(3) (6 Punkte)

Sei π eine irreduzible Darstellung von $\mathrm{so}(3)$ auf einem Hilbert-Raum $\mathcal{H}$. Wir verwenden die Bezeichungen $J_k := i\pi(l_k)$, wobei l_k die in Aufgabe 14 (a) verwendete Basis von $\mathrm{so}(3)$ ist, sowie $J^2 := J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$. Zeigen Sie: $J^2 = j(j+1)\,\mathbb{I}$, $\dim(\mathcal{H}) = 2j+1$ und $\mathcal{H}$ wird aufgespannt von Eigenvektoren von J_3 mit Eigenwerten $-j, -j+1, \ldots, j-1, j$. j ist hier von der Form $n/2$ mit $n \in \mathbb{N}$.
Hinweis: Verwenden Sie, dass $[J^2, J_i] = 0$, um die Wirkung von J^2 zu verstehen. Betrachten Sie dann Eigenvektoren für J_3. Untersuchen Sie die Wirkung von $J_\pm := J_1 \pm iJ_2$ auf diese Eigenvektoren, insbesondere auch das Verhalten der Norm unter der Wirkung dieser Operatoren.

Aufgabe 16 - Rotationsinvarianz und Hamiltonoperator (2 Punkte)

Betrachten Sie ein Teilchen im dreidimensionalen Raum unter dem Einfluss eines radialsymmetrischen Potentials $V(r)$, $r = |\vec{x}|$. Zeigen Sie, dass der Drehimpulsoperator $\vec{L}$ mit dem Hamiltonoperator vertauscht. Zeigen Sie auch, dass der Hamiltonoperator mit beliebigen Drehoperatoren $\mathcal{R}$ vertauscht.