

Institut für Theoretische Physik der Universität Karlsruhe
Prof. Dr. F.R. Klinkhamer, Dr. H. Sahlmann

Theoretische Physik E – Quantenmechanik II

Wintersemester 2009/2010

Übungsblatt 8

Abgabe am 14.12.2009, 10:00

Name: _____ Übungsgruppe: _____ Punkte: _____

Aufgabe 17 - Addition von Drehimpulsen (6 Punkte)

Wir betrachten zwei physikalische Systeme (z.B. zwei Teilchen), das eine mit Drehimpuls j_1 , das andere mit Drehimpuls j_2 . Die Zustandsräume der beiden Systeme tragen also irreduzible Darstellungen von $so(3)$. Wir fragen uns, welche Drehimpulse das kombinierte System (z.B. ein gebundener Zustand zweier Teilchen) haben kann. Der Zustandsraum des kombinierten Systems ist das Tensorprodukt der individuellen Zustandsräume. Auf diesem wirkt $so(3)$ durch das Tensorprodukt der Darstellungen:

$$\pi_{\otimes}(\cdot) = \pi_1(\cdot) \otimes \mathbb{I}_2 + \mathbb{I}_1 \otimes \pi_2(\cdot). \quad (1)$$

Wir verwenden auch die Bezeichnungen $J_k^{(1)} = i\pi_1(l_k) \otimes \mathbb{I}_2$, $J_k^{(2)} = \mathbb{I}_1 \otimes i\pi_2(l_k)$, $J_k^{\otimes} = i\pi_{\otimes}(l_k)$.

- Zeigen Sie, dass $[J_k^{(1)}, J_l^{(2)}] = 0$, und dass sowohl die Operatoren $\{J_k^{\otimes}\}$ als auch die Operatoren $\{J_k^{(1)}\}$ und $\{J_k^{(2)}\}$ die Drehimpuls-Vertauschungsrelationen erfüllen. (2 Punkte)
- Betrachten Sie die Basis des Zustandsraums des Gesamtsystems, die aus Vektoren der Form $|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle$ besteht. Wie wirken die Operatoren $J_{\pm}^{\otimes} := J_1^{\otimes} \pm iJ_2^{\otimes}$ und $J_3^{\otimes}$ auf dieser Basis? (ein Punkt)
- Betrachten Sie die Eigenwerte von $J_3^{\otimes}$ und zeigen Sie, dass $j_1 + j_2$ der maximal mögliche Eigenwert von $(J^{\otimes})^2$ ist. Daher kann die Darstellung $\pi_{\otimes}$ im Allgemeinen nicht irreduzibel sein. Warum nicht? (ein Punkt)
- Betrachten Sie den Fall $j_1 = 1, j_2 = \frac{1}{2}$: Konstruieren Sie aus den Vektoren $|1, m_1\rangle \otimes |\frac{1}{2}, m_2\rangle$ eine Basis aus Eigenvektoren für $J_3^{\otimes}$ und $(J^{\otimes})^2$. Welche Gesamtdrehimpulse kommen vor? (2 Punkte)

Aufgabe 18 - SU(2) und SO(3) (5 Punkte)

Eine Lie-Gruppe ist eine Gruppe, deren Elemente auf differenzierbare Weise parametrisiert werden können. Jeder Lie-Gruppe kann eine Lie-Algebra zugeordnet werden. Es sind nämlich

$$L_i := \frac{\partial}{\partial p_i} g(0, \dots, 0, p_i, 0, \dots, 0) \big|_{p_i=0} \quad (2)$$

Elemente einer Lie-Algebra bezüglich des Kommutators. Hier ist $g(p_1, \dots, p_n)$ das durch die Parameter $p_1, \dots, p_n$ ausgedrückte Gruppenelement, und wir gehen davon aus, dass es sich bei der Gruppe um eine Matrixgruppe handelt. Man kann leicht zeigen, dass die so erhaltene Lie-Algebra nicht von der Parametrisierung abhängt.

Ein Beispiel ist die Gruppe der Drehmatrizen in drei Dimensionen, $SO(3)$. Als Parameter wählen wir einen Vektor $\vec{\phi}$, dessen Richtung die Richtung der Drehachse, und dessen Länge den Drehwinkel angibt.

- (a) Berechnen Sie die Lie-Algebraelemente, die in obiger Parametrisierung von $SO(3)$ durch (2) definiert sind, und zeigen Sie, dass Sie die Lie-Algebra $so(3)$ erhalten. (ein Punkt)

Eine Darstellung einer Gruppe G ist eine Abbildung $\pi : G \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ mit $\pi(g_1)\pi(g_2) = \pi(g_1g_2)$. Man kann sich leicht überlegen, dass mithilfe von (2) jeder Darstellung einer Lie-Gruppe eine Darstellung der zugehörigen Lie-Algebra zugeordnet wird. Auf diese Weise kann man z.B. alle Darstellungen der Lie-Algebra $so(3)$ mit ganzzahligem j aus Darstellungen der Drehgruppe $SO(3)$ erhalten. Was ist aber mit den restlichen irreduziblen Darstellungen von $so(3)$? Diese kommen von Darstellungen der Lie-Gruppe $SU(2)$, der Gruppe der unitären 2×2 -Matrizen mit Determinante 1. $SU(2)$ hat die gleiche Lie-Algebra wie $SO(3)$, aber eine andere globale Struktur. $SU(2)$ kann wie folgt parametrisiert werden:

$$U(\vec{\phi}) = \mathbb{I} \cos \frac{\phi}{2} + 2\phi^{-1} \sum_i \tau_i \phi_i \sin \frac{\phi}{2}, \quad \tau_j = -\frac{i}{2} \sigma_j \quad (3)$$

mit $\phi = |\vec{\phi}|$ und den Pauli-Matrizen $\{\sigma_i\}$ vom letzten Übungsblatt.

- (b) Bestimmen Sie die Lie-Algebra von $SU(2)$ mithilfe obiger Parametrisierung. (ein Punkt)
- (c) Für einen Vektor $\vec{x}$ aus $\mathbb{R}^3$ definieren wir die Matrix $\vec{x} \cdot \vec{\sigma} := \sum_j x_j \sigma_j$. Zeigen Sie, dass

$$\text{tr}(\vec{x} \cdot \vec{\sigma}) = 0, \quad (\vec{x} \cdot \vec{\sigma})^\dagger = \vec{x} \cdot \vec{\sigma}, \quad \vec{x} \cdot \vec{y} = \frac{1}{2} \text{tr}(\vec{x} \cdot \vec{\sigma} \vec{y} \cdot \vec{\sigma}), \quad (\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z} = \frac{1}{2i} \text{tr}(\vec{x} \cdot \vec{\sigma} \vec{y} \cdot \vec{\sigma} \vec{z} \cdot \vec{\sigma}) \quad (4)$$

(ein Punkt)

- (d) Verwenden Sie (4), um eine Abbildung $R : SU(2) \rightarrow SO(3)$ zu konstruieren, für die $R(UU') = R(U)R(U')$ gilt. Zeigen Sie: Diese Abbildung ordnet jeweils zwei Elementen von $SU(2)$ das gleiche $SO(3)$ -Element zu. Hinweis: Betrachten Sie $U\vec{x} \cdot \vec{\sigma}U^{-1}$ für Elemente U aus $SU(2)$. (2 Punkte)

Bemerkung: Die Darstellungen von $SU(2)$ kommen in der Quantenmechanik vor, da sie äquivalent zu *projektiven Darstellungen* von $SO(3)$ sind, d.h. Abbildungen $\pi : SO(3) \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ mit $\pi(g_1)\pi(g_2) = \pi(g_1g_2)e^{i\phi(g_1, g_2)}$.

Aufgabe 19 - Isospin (4 Punkte)

Das Neutron n und das Proton p haben, abgesehen von der Ladung, sehr ähnlich physikalische Eigenschaften. Das brachte Heisenberg auf die Idee, die *Isospin-Symmetrie*, eine $SU(2)$ -Symmetrie für die starke Wechselwirkung, zu postulieren. p und n wären dann "spin-up" und "spin-down"-Zustände in der $j = 1/2$ -Darstellung dieser Symmetrie. In der Tat hat sich diese Idee als sehr fruchtbar erwiesen. Aufgrund ähnlicher Eigenschaften gruppiert man auf diese Weise z.B. die Pionen in ein Triplet (π^-, π^0, π^+) mit Isospin 1, die Deltas in ein Quadruplett ($\Delta^{++}, \Delta^+, \Delta^0, \Delta^-$) mit Isospin $3/2$. Heutzutage wird Isospin als Teil einer umfassenderen *Flavorsymmetrie* betrachtet, die ihre Erklärung im Quarkmodell findet. Wir wollen im Folgenden sehen, wie man die Isospinsymmetrie verwenden kann, um Vorhersagen über Zerfälle dieser Teilchen zu machen. Als Beispiel betrachten wir die Deltas: Sie zerfallen überwiegend in Paare von jeweils einem Nukleon und einem Pion. Aufgrund von Ladungserhaltung muss also

$$\Delta^{++} \rightarrow p\pi^+. \quad (5)$$

Das Proton hat Isospin 3-Komponente $1/2$: $I_3|p\rangle = \frac{1}{2}|p\rangle$. Hier haben wir mit I_3 den zu J_3 analogen Operator im Isospinraum bezeichnet. Für das π^+ gilt $I_3|\pi^+\rangle = |\pi^+\rangle$.

- (a) Berechnen Sie Isospin 3-Komponente von Δ^{++} . (ein Punkt)
- (b) Δ^+ kann aufgrund von Ladungserhaltung nur in (p, π^0) oder (n, π^+) zerfallen. Berechnen Sie das Verhältnis der Anzahl der Zerfälle in den beiden Zerfallskanälen. Hinweis: Verwenden Sie das Ergebnis aus (a), $I_3|\Delta^+\rangle = 1/2|\Delta^+\rangle$, (5), und die Symmetrie unter Isospinrotationen. (3 Punkte)