

Institut für Theoretische Physik der Universität Karlsruhe
Prof. Dr. F.R. Klinkhamer, Dr. H. Sahlmann

Theoretische Physik E – Quantenmechanik II

Wintersemester 2009/2010

Übungsblatt 9

Abgabe am 21.12.2009, 10:00

Name: _____ Übungsgruppe: _____ Punkte: _____

Hinweis: Die Tutorien am 22.12.2009 finden wie gewohnt statt. Die ersten Tutorien im neuen Jahr sind am 12.1.2010.

Aufgabe 20 - Stark-Effekt (9 Punkte)

Wir betrachten ein Wasserstoffatom in einem schwachen externen elektrischen Feld $\vec{E} = \text{const.}$ Neben der Wechselwirkung des Elektrons mit dem elektrischen Feld des Protons gibt es hier also noch eine Wechselwirkung mit dem externen Feld, die durch den folgenden Hamiltonoperator beschrieben wird:

$$H_I = -\vec{D} \cdot \vec{E}, \quad (1)$$

wobei $\vec{D}$ das Dipolmoment $\vec{D} = -e\vec{r}$ des Elektrons mit Elementarladung e ist. Durch diesen Zusatzterm werden die Energieniveaus des Wasserstoffatoms verändert. Insbesondere kommt es zu einer Aufspaltung von vorher entarteten Energieniveaus, dem so genannten *Stark-Effekt*.

- (a) Berechnen Sie die Korrektur zur Grundzustandsenergie des Wasserstoffatoms aufgrund von (1) in erster Ordnung Störungstheorie. (2 Punkte)
- (b) Berechnen Sie die Korrektur des Grundzustandes in erster Ordnung Störungstheorie, sowie die Korrektur der Grundzustandsenergie in zweiter Ordnung Störungstheorie. Sie erhalten jeweils unendliche Reihen, die sich nicht ohne weiteres auswerten lassen. Vereinfachen Sie diese zumindest etwas mithilfe der Relation

$$\cos(\theta)Y_l^m(\theta, \phi) = f_1(l, m)Y_{l+1}^m(\theta, \phi) + f_2(l, m)Y_{l-1}^m(\theta, \phi) \quad (2)$$

für die Kugelflächenfunktionen Y_l^m . (2 Punkte)

- (c) Betrachten Sie nun das erste angeregte Energieniveau ($n = 2$). Berechnen Sie die Korrekturen durch (1) zu den Energieeigenwerten in erster Ordnung Störungstheorie. (5 Punkte)

Aufgabe 21 - Spin-Bahn-Kopplung (5 Punkte)

Der vom Wasserstoff-Atom bekannte Hamilton-Operator des Coulomb-Problems ist eigentlich eine Näherung für Geschwindigkeiten $v \ll c$. Für eine genauere Rechnung muss man relativistische Korrekturen mitnehmen. Einer dieser Korrekturterme ist die Spin-Bahn-Kopplung H_{LS} :

$$H_{LS} = \frac{1}{2m^2c^2} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \vec{L} \cdot \vec{S}, \quad V(r) = -\frac{e^2}{r}, \quad (3)$$

wobei $\vec{L}$ der Bahndrehimpuls und $\vec{S}$ der Elektronenspin ist.

- (a) Begründen Sie Gleichung (3). Hinweis: Die Ladung des Protons erzeugt ein elektrisches Feld $\vec{E}$. Zeigen Sie zunächst, dass in einem instantanen Ruhesystem des Elektrons ein Magnetfeld $\vec{B} \approx \vec{E} \times \vec{v}/c$ existiert. Verwenden Sie dann, dass das Elektron ein magnetisches Moment

$$\vec{\mu} = -\frac{e}{2mc} \vec{S} \quad (4)$$

besitzt, welches im Magnetfeld $\vec{B}$ die Energie $-\vec{\mu} \cdot \vec{B}$ beisteuert.¹ (2 Punkte)

- (b) Bestimmen Sie die Aufspaltung der Niveaus durch die Spin-Bahn-Kopplung in Störungsrechnung in erster Ordnung. Hinweis: Es empfiehlt sich, den Gesamtdrehimpuls $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ zu betrachten. Sie können auch den folgenden Erwartungswert ohne Rechnung verwenden:

$$\langle n, l, m | r^{-3} | n, l, m \rangle = \frac{1}{n^3 a_0^3 l(l + \frac{1}{2})(l + 1)}, \quad (5)$$

wobei a_0 der Bohrsche Radius und $|n, l, m\rangle$ die üblichen Wasserstoff-Eigenfunktionen sind. (3 Punkte)

¹Diese Herleitung ist in zweifacher Hinsicht ungenau: Das klassisch erwartete magnetische Moment (4) ist zu klein. Ein Elektron hat in Wirklichkeit ein ungefähr doppelt so großes Moment. Weiterhin ist das Elektron beschleunigt bewegt. Ein daraus resultierender Effekt (Thomas-Präzession) steuert einen weiteren Faktor bei. Diese beiden Ungenauigkeiten heben sich aber gegenseitig ungefähr auf.