Institut für Theoretische Physik der Universität Karlsruhe
Prof. Dr. F.R. Klinkhamer, Dr. H. Sahlmann

Theoretische Physik E – Quantenmechanik II

Wintersemester 2009/2010

Übungsblatt 10 Abgabe am 11.1.2010, 10:00

Name: ______________________ Übungsgruppe: ______ Punkte: ______

Aufgabe 22 - Identische Teilchen im thermischen Gleichgewicht (14 Punkte)

Zunächst betrachten wir ein System von N nicht-wechselwirkenden Teilchen. Das Energiespektrum des Hamiltonoperators H_1 für ein einzelnes Teilchen bestehe aus diskreten, nicht ausgearteten Energieniveaus E_n ($n \in \mathbb{N}_0$, $E_{n+1} > E_n$).

(a) Geben Sie den Hamiltonoperator H_N für das gesamte System an und bestimmen Sie eine Basis von Eigenvektoren sowie die zugehörigen Eigenwerte für den Fall, dass es sich bei den Teilchen um Bosonen handelt. Geben Sie insbesondere den Grundzustand und dessen Energie explizit an. (*ein Punkt*)

(b) Wie (a), jedoch nun für den Fall, dass es sich um Fermionen handelt. (*ein Punkt*)

Nun betrachten wir das System von identischen Teilchen bei einer Temperatur T. Wie in Aufgabe 10 ausgeführt, kann man das System in diesem Fall durch eine Dichtematrix

$$\rho = \frac{e^{-\beta H}}{\operatorname{tr} e^{-\beta H}} \tag{1}$$

beschreiben. Hierbei ist $\beta = 1/(k_B T)$, mit der Bolzmann-Konstanten k_B. Um die folgenden Rechnungen zu vereinfachen, betrachten wir den Fall, dass die Anzahl N der Teilchen nicht festgelegt, sondern eine Eigenschaft des Quantenzustands ist. Der zugehörige Hilbert-Raum ist also

$$\mathcal{H}_{\text{Fock}} = \bigoplus_{N=0}^{\infty} \mathcal{H}_N \tag{2}$$

wobei $\mathcal{H}_N$ der N-Teilchen-Raum aus Aufgabenteil (a) bzw. (b) ist. Der Hamiltonoperator ist

$$H = \bigoplus_{N=0}^{\infty} H_N. \tag{3}$$

wobei H_N der N-Teilchen-Hamiltonoperator aus Aufgabenteil (a) bzw. (b) ist. Sie brauchen sich im Folgenden keine Gedanken über die Konvergenz der auftretenden Spuren, Summen und Produkte zu machen.

(c) Bestimmen Sie den Erwartungswert $[N_i]$ für die Anzahl N_i der Teilchen, die sich im Energieniveau E_i befinden, für den Fall, dass es sich um Bosonen handelt. Hinweis zum Überprüfen, oder zur Verwendung in (g): Sie sollten das Ergebnis

$$[N_i] = \frac{1}{\exp(\beta E_i) - 1} \tag{4}$$

erhalten. (*3 Punkte*)

(d) Berechnen Sie, wie sich Ihr Resultat aus (c) ändert, wenn das Energieniveau E_i g_i-fach ausgeartet ist. (*ein Punkt*)

(e) Bestimmen Sie den Erwartungswert $[N_i]$ für die Anzahl N_i der Teilchen, die sich im Energieniveau E_i befinden, für den Fall, dass es sich um Fermionen handelt. (*3 Punkte*)

(f) Berechnen Sie, wie sich Ihr Resultat aus (e) ändert, wenn das Energieniveau E_i g_i-fach ausgeartet ist. (*ein Punkt*)

Zum Schluss wollen wir die bisherigen Ergebnisse auf den Fall von elektromagnetischer Strahlung anwenden. Wir betrachten dazu das elektromagnetische Feld in einer kubischen Kiste (Seitenlänge L) mit perfekt reflektierenden Seitenwänden. Das Feld lässt sich nach den Regeln der Quantenmechanik quantisieren. Dabei stellt sich heraus, dass sich die Anregungen (Photonen) $|\vec{m}, i\rangle$ des quantisierten Feldes in der Kiste durch einen Vektor $\vec{m}$ aus natürlichen Zahlen und eine diskrete Variable $i = \pm 1$ beschreiben lassen. Der Vektor $\vec{k} = \frac{\pi}{L}\vec{m}$ kann als Wellenvektor des Photons aufgefasst werden, die diskrete Variable i beschreibt den Polarisationszustand. Die Energie des Photons ist gegeben durch

$$E_{\vec{m},i} = \frac{hc}{2L}\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2}. \tag{5}$$

Die Photonen in der Kiste verhalten sich wie Bosonen, und sie wechselwirken nicht miteinander.

(g) Berechnen Sie zunächst den Erwartungswert $[N_{\vec{m},i}]$ für die Anzahl der Photonen im Zustand $|\vec{m}, i\rangle$ mit Hilfe des Resultats aus (c). (*ein Punkt*)

(h) Nun betrachten wir die Entartung der Energieniveaus und die Dichte der Zustände: Berechnen Sie die Anzahl der Zustände $g(E)dE$ in einem kleinen Energieintervall $[E, E + dE]$ angenähert für den Fall, dass $EL \gg hc$, und bestimmen Sie daraus die Zustandsdichte $g(E)$ im Energieraum.
Hinweis: Betrachten Sie zunächst die Dichte der Vektoren $\vec{m} \in \mathbb{N}_0^3$ in $\mathbb{R}^3$. Wo liegen die Zustände mit Energie in $[E, E + dE]$ in diesem Bild? (*3 Punkte*)

(i) Berechnen Sie zum Abschluss die Energiedichte

$$u(E) = \frac{Eg(E)[N_E]}{L^3}, \tag{6}$$

wobei $[N_E]$ das Ergebnis von (g), ausgedrückt durch die Energie E, ist. Berechnen Sie auch die Energiedichte $w(\nu)$ im Frequenzraum. Sie sollten als Resultat die Plancksche Energieverteilung

$$w(\nu) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{1}{e^{\beta h\nu} - 1} \tag{7}$$

erhalten. (*ein Punkt*)

Wir wünschen Ihnen ein fröhliches Weihnachtsfest und einen guten und sicheren Rutsch ins neue Jahr!
