

Institut für Theoretische Physik der Universität Karlsruhe
Prof. Dr. F.R. Klinkhamer, Dr. H. Sahlmann

Theoretische Physik E – Quantenmechanik II

Wintersemester 2009/2010

Übungsblatt 11

Abgabe am 18.1.2010, 10:00

Name: _____ Übungsgruppe: _____ Punkte: _____

Hinweis: Es wird insgesamt 14 Übungsblätter geben, d.h. noch vier einschließlich dem, dass Sie gerade anschauen. Sie können jeweils zwischen 10 und 15 Punkte erreichen.

Aufgabe 23 - Streuung identischer Teilchen (6 Punkte)

In dieser Aufgabe betrachten wir die Streuung von identischen Teilchen und zeigen, wie sie sich von der Streuung unterscheidbarer Teilchen unterscheidet. Zunächst betrachten wir den allgemeinen Formalismus für die Streuung zweier (spinloser) Teilchen. Das System kann beschrieben werden durch eine Wellenfunktion

$$\Psi(\vec{R}, \vec{r}, t) = \psi(\vec{R}, t) \otimes \phi(\vec{r}, t), \quad (1)$$

wobei $\vec{R}$ der Ortsvektor des Schwerpunkts des Systems und $\vec{r}$ die Differenz der Ortsvektoren der Teilchen ist. Vor der Streuung, d.h. für $t \ll 0$, kann man annehmen, dass $\phi(\vec{r}, t)$ angenähert durch ein Wellenpaket $\phi_0(\vec{r}, t)$ mit recht scharfem Impuls $\hbar\vec{k}$ gegeben ist. Nach der Streuung, d.h. für $t \gg 0$, ist $\phi(\vec{r}, t)$ gegeben durch das ursprüngliche Wellenpaket, sowie einen gestreuten Anteil:

$$\phi(\vec{r}, t) \propto \phi_0(\vec{r}, t) + c(t)f(\theta, \varphi) \frac{e^{ikr}}{r} \quad \text{für } t \gg 0. \quad (2)$$

Der gestreute Anteil hat die Form einer Kugelwelle, moduliert durch einen richtungsabhängigen Faktor $f(\theta, \varphi)$. Dieser wird *Streuamplitude* genannt. θ und φ sind hierbei die gewöhnlichen Koordinaten auf der Einheitskugel. Es kann gezeigt werden, dass der differenzielle Wirkungsquerschnitt für die Streuung gerade durch das Betragsquadrat der Streuamplitude gegeben ist:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, \varphi) = |f(\theta, \varphi)|^2. \quad (3)$$

Strategien zur Berechnung von f sind Teil der Streutheorie und werden später in der Vorlesung behandelt.

- (a) Sei $f(\theta, \varphi)$ die Streuamplitude für die Streuung zweier Teilchen für den Fall dass man sie unterscheiden kann. Sei $f_i(\theta, \varphi)$ die Streuamplitude für den Fall, dass es sich um identische Teilchen (in der ansonsten unveränderten physikalischen Situation) handelt. Drücken Sie f_i durch f aus. Unterscheiden Sie dabei den Fall von identischen Fermionen und den von identischen Bosonen. (2 Punkte)
- (b) Wenn für die Streuung ein Zentralpotenzial verantwortlich ist, ist die Streuamplitude unabhängig von φ . Zusätzlich macht man häufig die Näherung, dass die Streuamplitude auch noch unabhängig von θ ist ("s-Wellen Streuung"). Berechnen Sie den differenzielle Wirkungsquerschnitt für ein Zentralpotenzial in dieser

Näherung, und vergleichen Sie mit dem für die Streuung unterscheidbarer Teilchen.
(ein Punkt)

- (c) Zeigen Sie, dass der differentielle Streuquerschnitt zweier identischer, unpolarisierter, geladener Spin- $\frac{1}{2}$ Fermionen mit Ladung e und Masse m aufgrund ihrer Coulomb-Wechselwirkung durch die Mottsche Formel

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) = \frac{\gamma^2}{4k^2} \left[\sin^{-4}\left(\frac{\theta}{2}\right) + \cos^{-4}\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^{-2}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos^{-2}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\gamma \ln \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \right] \quad (4)$$

gegeben ist, wobei $\gamma = me^2/(2\hbar^2 k)$. Benutzen Sie hierfür die Streuamplitude für die Coulomb-Wechselwirkung zweier unterscheidbarer Teilchen

$$f(\theta) = -\frac{\gamma}{2k} \sin^{-2}\left(\frac{\theta}{2}\right) \exp\left(-i\gamma \ln\left(\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\right), \quad (5)$$

sowie die folgenden Hinweise: Zwei Spins mit $j = \frac{1}{2}$ können in einem Triplettzustand (Gesamtspin 1) sein, welcher symmetrisch unter Vertauschung der Spins ist, oder in einem Singlettzustand (Gesamtspin 0), welcher antisymmetrisch unter Vertauschung der Spins ist. In einem unpolarisierten Strahl kommt jeder mögliche Zustand mit dem gleichen statistischen Gewicht vor, die drei möglichen Triplettzustände also mit dem Gewicht $\frac{3}{4}$, der Singlettzustand mit dem Gewicht $\frac{1}{4}$.

Aufgabe 24 - CP-Verletzung (5 Punkte)

In der schwachen Wechselwirkung ist weder die Paritätstransformation P noch die Ladungskonjugation¹ C eine Symmetrieoperation. Lange Zeit glaubte man hingegen, dass die kombinierte Operation CP eine Symmetrie wäre. Dass dies nicht der Fall ist, konnte durch das Studium der neutralen K-Mesonen $|K^0\rangle$ und $|\bar{K}^0\rangle$ nachgewiesen werden. Es gilt $C|K^0\rangle = |\bar{K}^0\rangle$, und beide sind Eigenzustände von P zum Eigenwert -1 .

- (a) Finden Sie unter den Linearkombinationen von $|K^0\rangle$ und $|\bar{K}^0\rangle$ die normierten Eigenzustände $|K_1\rangle$ (Eigenwert $+1$) und $|K_2\rangle$ (Eigenwert -1) des CP -Operators. (2 Punkte)
- (b) Typische Zerfälle der neutralen K-Mesonen sind der Zerfall in zwei Pionen (CP -Eigenzustand mit Eigenwert $+1$) oder drei Pionen (CP -Eigenzustand mit Eigenwert -1), wobei der Zerfall in zwei Pionen wesentlich schneller abläuft. In einem Strahl der anfangs nur $|K^0\rangle$ enthält, beobachtet man nach langer Laufzeit noch immer Zerfälle in zwei Pionen. Was bedeutet das für die CP -Invarianz?

Genaugenommen können die CP -Eigenzustände $|K_1\rangle, |K_2\rangle$ keine exakten Eigenzustände unter der schwachen Wechselwirkung sein (warum nicht?). Es gilt also $|K_L\rangle \approx |K_2\rangle + \epsilon|K_1\rangle$ mit einem kleinen aber nichtverschwindendem ϵ ($\approx 10^{-3}$). $|K_L\rangle$ ist hier der langlebige Zustand. Ähnliches gilt für den kurzlebigen Zustand $|K_S\rangle$, mit den Rollen von $|K_2\rangle$ und $|K_1\rangle$ vertauscht.

- (c) Neben den Zerfällen in zwei und drei Pionen existieren für das K_L auch folgende Zerfälle: (a) $K_L \rightarrow \pi^+ + e^- + \bar{\nu}_e$, und (b) $K_L \rightarrow \pi^- + e^+ + \nu_e$. Wir haben mit

¹Die Operation C führt den Zustandsvektor $|\alpha\rangle$ eines Teilchens vom Typ α in sein Antiteilchen über: $C|\alpha\rangle = |\bar{\alpha}\rangle$.

π^+ und π^- die geladenen Pionen bezeichnet, welche Antiteilchen voneinander sind. Die Pionen haben negative Parität. Für die Fermionen e^- , ν_e gilt, dass sie positive, ihre Antiteilchen negative Parität haben. Was würde sich für die relative Wahrscheinlichkeit der Zerfälle (a),(b) ergeben, wenn $|K_L\rangle$ ein CP-Eigenzustand wäre? Experimentell findet man, dass (b) häufiger vorkommt, als (a). Können Sie aufgrund dieser Tatsache eine *absolute* Definition von Materie und Antimaterie angeben? (2 Punkte)

Aufgabe 25 - Symmetrisierungsoperator, Addition von Spins (4 Punkte)

In dieser Aufgabe zeigen wir, dass man beliebige irreduzible Darstellungen der Drehimpulsalgebra durch symmetrisierung aus der Spin-1/2 Darstellung erhalten kann. Sei dazu $V^{(1/2)}$ ein zweidimensionaler Raum, in dem die Drehimpulsalgebra gemäß der Spin-1/2 Darstellung wirkt. Wir betrachten das n-fache Tensorprodukt

$$V := \underbrace{V^{(1/2)} \otimes \dots \otimes V^{(1/2)}}_{n \text{ Faktoren}}. \quad (6)$$

Ist $\pi \in S_n$ eine Permutation der Zahlen $1 \dots n$ (S_n bezeichnet die Gruppe solcher Permutationen), so bezeichnen wir mit P_π den zugehörigen Vertauschungsoperator auf V . Weiterhin definieren wir

$$S := \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} P_\pi. \quad (7)$$

- (a) Zeigen Sie, dass S ein Projektor ist. (2 Punkte)
- (b) V_S sei der Unterraum der Eigenvektoren von S zum Eigenwert 1. Begründen Sie, warum die Anwendung der Gesamtdrehimpulsoperatoren $\vec{J}$ den Raum V_S invariant lässt. (ein Punkt)
- (c) Zeigen Sie, dass die Gesamtdrehimpulsoperatoren $\vec{J}$ auf V_S eine irreduzible Darstellung der Drehimpulsalgebra bilden. Hinweis: Es gibt einen Vektor in V_S , der sofort als Eigenvektor von J_z erkannt werden kann. Bestimmen Sie den zugehörigen Eigenwert. (ein Punkt)