

Institut für Theoretische Physik der Universität Karlsruhe
Prof. Dr. F.R. Klinkhamer, Dr. H. Sahlmann

Theoretische Physik E – Quantenmechanik II

Wintersemester 2009/2010

Übungsblatt 12

Abgabe am 25.1.2010, 10:00

Name: _____ Übungsgruppe: _____ Punkte: _____

Aufgabe 26 - Zeittranslationsinvarianz und Energieerhaltung (3 Punkte)

Ein quantenmechanisches System ist invariant unter Zeittranslationen, wenn für eine Lösung $\psi(t)$ der Schrödingergleichung und $\tau \in \mathbb{R}$ immer auch eine Lösung $\psi'(t)$ existiert, die sich wie folgt schreiben lässt:

$$\psi'(t) := e^{i\alpha(t,\tau)}\psi(t+\tau), \quad (1)$$

wobei $\alpha(t, \tau)$ eine reelle Funktion (und unabhängig von ψ) ist. Zeigen Sie, dass die Energie des Systems durch einen zeitunabhängigen Hamiltonoperator beschrieben werden kann, und mithin erhalten ist.

Aufgabe 27 - Mehr über Fock-Räume (8 Punkte)

Sei $H = \vec{p}^2/2m + V(\vec{x})$ der Hamiltonoperator eines Teilchens. Dieser wirkt auf dem Hilbert-Raum $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3, d^3x)$. Wir nehmen an, dass dieser ein rein diskretes, nicht entartetes Spektrum mit Energieeigenwerten $E_0, e_1, \dots$ besitzt. Wir betrachten die Vielteilchenzustände für dieses System, für den Fall dass es sich um nicht wechselwirkende Bosonen/Fermionen handelt. In Aufgabe 22 haben wir bereits Bekanntschaft mit den sogenannten *Fock-Räumen*

$$\mathcal{F}_S = \bigoplus_{N=0}^{\infty} \mathcal{S} \left[\bigotimes_{n=1}^N \mathcal{H} \right], \quad \mathcal{F}_A = \bigoplus_{N=0}^{\infty} \mathcal{A} \left[\bigotimes_{n=1}^N \mathcal{H} \right] \quad (2)$$

gemacht, die diese Vielteilchenzustände enthalten. Dabei sind $\mathcal{S}, \mathcal{A}$ der Symmetrisierungs- bzw. Antisymmetrisierungsoperator und entsprechend ist $\mathcal{F}_S$ der geeignete Raum für den bosonischen, und $\mathcal{F}_A$ der für den fermionischen Fall. Wir hatten bereits gesehen, dass diese Räume eine Basis von Vektoren

$$|n_0, n_1, \dots\rangle_{S/A} = c_{\{n_i\}} \mathcal{S}/\mathcal{A} \left[\underbrace{|E_0\rangle \otimes \dots \otimes |E_0\rangle}_{n_0 \text{ mal}} \otimes \underbrace{|E_1\rangle \otimes \dots \otimes |E_1\rangle}_{n_1 \text{ mal}} \otimes \dots \right] \quad (3)$$

besitzen, wobei wir annehmen müssen, dass $\sum_i n_i < \infty$ und die n_i im fermionischen Fall nur die Werte 0 und 1 annehmen können. Die $|E_i\rangle$ sind hierbei die normierten Einteilchen-Energieeigenzustände, und die reelle Konstante $c_{\{n_i\}}$ ist so gewählt, dass die Vektoren normiert sind. Wir definieren auch noch die Operatoren

$$a_i |n_0, n_1, \dots\rangle_S = \sqrt{n_i} |n_0, n_1, \dots, n_i - 1, n_{i+1}, \dots\rangle_S \quad (4)$$

$$b_i |n_0, n_1, \dots\rangle_A = \sqrt{n_i} |n_0, n_1, \dots, n_i - 1, n_{i+1}, \dots\rangle_A. \quad (5)$$

(a) Zeigen Sie, dass die in (3) definierten Zustände orthogonal zueinander sind und bestimmen Sie $c_{\{n_i\}}$. (2 Punkte)

(b) Berechnen Sie die adjungierten Operatoren $a_i^\dagger, b_i^\dagger$. (2 Punkte)

(c) Bestimmen Sie die (anti-)Kommutatoren

$$[a_i, a_j], \quad [a_i, a_j^\dagger], \quad [a_i^\dagger, a_j^\dagger], \quad \{b_i, b_j^\dagger\} \equiv b_i b_j^\dagger + b_j^\dagger b_i. \quad (6)$$

(2 Punkte)

(d) Seien $|\vec{x}\rangle$ die Ortseigenzustände des Einteilchensystems. Wir definieren die Operatoren

$$a(\vec{x}) := \sum_i \langle \vec{x} | E_i \rangle a_i. \quad (7)$$

Berechnen Sie den Kommutator $[a(x), a(y)^\dagger]$. Bringen Sie $a(\vec{x})$ ins Heisenbergbild und zeigen Sie, dass der resultierende Operator die Schrödingergleichung des Einteilchensystems erfüllt. Hinweis: Der Hamiltonoperator im Fockraum kann durch die Operatoren $N_i = a_i^\dagger a_i$ ausgedrückt werden. (2 Punkte)

Aufgabe 28 - Die Klein-Gordon-Gleichung (4 Punkte)

Wir betrachten die Klein-Gordon-Gleichung

$$(\square + m^2)\phi = 0, \quad \text{wobei} \quad \square = \eta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu}. \quad (8)$$

(a) Wir nehmen an, dass ϕ sich wie ein Skalar unter Lorentz-Transformationen verhält, d.h.

$$\Lambda : \phi(x^\mu) \mapsto \phi((\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu x^\nu) \quad (9)$$

für Lorentz-Transformationen Λ . Zeigen Sie, dass aus $(\square + m^2)\phi = 0$ folgt, dass auch $(\square + m^2)\phi' = 0$, wobei ϕ' die Lorentztransformation von ϕ ist. (ein Punkt)

(b) Sei ϕ eine Lösung der Klein-Gordon-Gleichung. Zeigen Sie, dass der Viererstrom

$$j^\mu = i[\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*] \quad (10)$$

erhalten ist, d.h. dass $\partial_\mu j^\mu = 0$ gilt. (ein Punkt)

(c) Zeigen Sie, dass

$$\phi(x) = \int d^4k e^{-ik_\mu x^\mu} f(\vec{k}) \delta(k_\mu k^\mu - m^2) \quad (11)$$

für beliebige $f(\vec{k})$ ($\vec{k}$ ist der räumliche Anteil von k_μ) eine Lösung der Klein-Gordon-Gleichung ist. Führen Sie die Integration über k_0 explizit aus. Was ist die Dispersionsrelation der auftretenden ebenen Wellen und was lässt sich über ihre Energien sagen? (2 Punkte)