

Institut für Theoretische Physik der Universität Karlsruhe
Prof. Dr. F.R. Klinkhamer, Dr. H. Sahlmann

Theoretische Physik E – Quantenmechanik II

Wintersemester 2009/2010

Übungsblatt 13

Abgabe am 1.2.2010, 10:00

Name: _____ Übungsgruppe: _____ Punkte: _____

Aufgabe 29 - Stromerhaltung (2 Punkte)

Berechnen Sie die Viererdivergenz der Stromdichten

$$j^\mu = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x), \quad j_5^\mu = \bar{\psi}(x)\gamma_5\gamma^\mu\psi(x) \quad (1)$$

(mit $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$) für den Fall, dass ψ die freie Dirac-Gleichung mit Masse m erfüllt. Zeigen Sie, dass $\partial_\mu j_5^\mu$ für masselose Teilchen verschwindet.

Aufgabe 30 - Lorentz-Transformation von Spinoren (7 Punkte)

Die Lorentz-Transformation eines Dirac-Spinors ist gegeben durch

$$\psi'(x') = \Lambda\psi(x), \quad (2)$$

wobei die Matrix Λ die Relation

$$\Omega^\mu{}_\nu\gamma^\nu = \Lambda^{-1}\gamma^\mu\Lambda \quad (3)$$

erfüllen muss. $\Omega^\mu{}_\nu$ ist die Transformationsmatrix des 4-Vektors x ,

$$x'^\mu = \Omega^\mu{}_\nu x^\nu. \quad (4)$$

- (a) Zeigen Sie, dass die Dirac-Gleichung forminvariant unter Lorentz-Transformationen ist. (ein Punkt)
- (b) Zeigen Sie, dass man für eine infinitesimale Lorentz-Transformation

$$\Omega_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu} + O(\omega^2) \quad (5)$$

mit $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ die Matrix Λ wie folgt wählen kann:

$$\Lambda = \mathbb{I} + \frac{1}{8}\omega^{\mu\nu}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]. \quad (6)$$

(2 Punkte)

- (c) Berechnen Sie das Verhalten der Stromdichten j^μ und j_5^μ (siehe Aufgabe 29) unter Lorentz-Transformationen. Hinweis: Sie können verwenden, dass Λ die Relation $\gamma^0\Lambda^\dagger\gamma^0 = \Lambda^{-1}$ erfüllt. (2 Punkte)
- (d) Wir wollen eine zu den Teilaufgaben (a), (b) analoge Konstruktion für die räumlichen Drehungen eines Spin-1/2-Teilchens durchführen. Finden Sie drei 2×2 -Matrizen Γ_i , die die Relationen

$$\{\Gamma_i, \Gamma_j\} = 2\delta_{ij} \quad (7)$$

erfüllen. Berechnen Sie die Matrix

$$\Lambda = \mathbb{I} + \frac{1}{8} \omega^{ij} [\Gamma_i, \Gamma_j] \quad (8)$$

mit $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$. Zeigen Sie, dass die zugehörige Transformation von 3-Vektoren analog zu (4),(5) eine infinitesimale Drehung ist, und Λ die zugehörige Drehmatrix für einen Spinor. (2 Punkte)

Aufgabe 31 - Dirac-Gleichung und g-Faktor des Elektrons (6 Punkte)

Betrachten Sie die Dirac-Gleichung für ein an das elektromagnetische Feld gekoppeltes Elektron (Ladung $e < 0$)

$$\left[\gamma^\mu \left(i\hbar \partial_\mu - \frac{e}{c} A_\mu(x) \right) - mc \right] \psi(x) = 0, \quad (9)$$

mit den Gamma-Matrizen in der Dirac-Darstellung

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{I}_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

$\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3$ sind die Pauli-Matrizen. Das Vektorpotential erfülle $A_0(x) = 0$ und $\partial_0 A_\mu(x) = 0$. Wir schreiben den Dirac-Spinor als

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_L(x) \\ \psi_S(x) \end{pmatrix}, \quad (11)$$

wobei ψ_L und ψ_S zweikomponentige Spinoren sind.

- (a) Zerlegen Sie die Dirac-Gleichung in zwei gekoppelte Gleichungen für ψ_L, ψ_S für den Fall, dass $\psi(x)$ stationär ist, also die Zeitabhängigkeit $e^{-iEt/\hbar}$ hat. (2 Punkte)
- (b) Wir wollen nun den nichtrelativistischen Limes bestimmen. Die Energie E zerlegen wir gemäß $E = mc^2 + E_{NR}$ in einen Anteil, der der Ruhemasse des Elektrons entspricht, und einen Anteil E_{NR} . Entwickeln Sie die Gleichungen für ψ_L, ψ_S aus (a) zur nullten Ordnung in E_{NR}/mc^2 . Zeigen Sie insbesondere, dass in dieser Näherung $\psi_S = 0$ ist, und ψ_L der Gleichung für ein nichtrelativistisches geladenes Teilchen

$$\left(\frac{\vec{\pi}^2}{2m} + \frac{1}{2} g \mu_B \vec{B} \cdot \vec{\sigma} \right) \psi_L = E_{NR} \psi_L \quad (12)$$

in einem elektrischen Feld mit g-Faktor 2 erfüllt. Hier ist $\vec{\pi} = -i\hbar \vec{\nabla} - e/c \vec{A}$ und $\mu_B = \hbar|e|/(2mc)$ das Bohrsche Magneton. (2 Punkte)

- (c) Wir ändern die ursprüngliche Gleichung nun ab, indem wir einen weiteren Term hinzufügen:

$$\left[\gamma^\mu \left(i\hbar \partial_\mu - \frac{e}{c} A_\mu(x) \right) - mc + \frac{e\beta}{mc^2} F_{\mu\nu}(x) \Sigma^{\mu\nu} \right] \psi(x) = 0, \quad (13)$$

mit $\Sigma^{\mu\nu} = i\hbar[\gamma^\mu, \gamma^\nu]/4$ und β einer dimensionslosen Konstante. Gehen Sie wie in (b) vor und berechnen Sie den g-Faktor des Elektrons, der aus dieser Gleichung im nichtrelativistischen Limes folgt. (2 Punkte)