

Institut für Theoretische Physik der Universität Karlsruhe  
Prof. Dr. F.R. Klinkhamer, Dr. H. Sahlmann

## Theoretische Physik E – Quantenmechanik II

Wintersemester 2009/2010

Übungsblatt 14

Abgabe am 8.2.2010, 10:00

Name: \_\_\_\_\_ Übungsgruppe: \_\_\_\_\_ Punkte: \_\_\_\_\_

### Aufgabe 32 - Zeitumkehr für Spinoren (5 Punkte)

Die Dirac-Gleichung für ein an das elektromagnetische Feld gekoppeltes Elektron (Ladung  $e < 0$ ) lautet

$$[\gamma^\mu (i\hbar\partial_\mu - eA_\mu(x)) - m] \psi(x) = 0. \quad (1)$$

$K$  sei ein *anti*unitärer Operator mit den Eigenschaften

$$K\gamma^\mu K^\dagger = \gamma^\mu, \quad K^\dagger K = KK^\dagger = \mathbb{I}, \quad K^2 = -\mathbb{I}, \quad K\vec{x}K^\dagger = \vec{x}, \quad K\vec{p}K = -\vec{p}. \quad (2)$$

Der zeitumkehrtransformierte Spinor  $\psi^T(x)$  ist definiert als

$$\psi^T(t, \vec{x}) := \gamma^0 K \psi(-t, \vec{x}). \quad (3)$$

Das Potenzial  $A_\mu$  transformiert sich unter Zeitumkehr gemäß

$$A_0^T(t, \vec{x}) = A_0(-t, \vec{x}), \quad \vec{A}^T = -\vec{A}(-t, \vec{x}). \quad (4)$$

- Leiten Sie aus (1) die Dirac-Gleichung für  $\psi^T$  her. Geben Sie eine physikalische Begründung für das Transformationsverhalten (4). (3 Punkte)
- Zeigen Sie, dass man in der Dirac-Darstellung die Wahl  $K = i\gamma^2\gamma^0 K_D$  treffen kann, wobei  $K_D$  der zur Dirac-Darstellung gehörende Operator der Komplexkonjugation ist. (2 Punkte)

### Aufgabe 33 - S-Wellenstreuung an der harten Kugel (4 Punkte)

Wir betrachten die Streuung an einer harten Kugel, d.h. die Wellenfunktion muss innerhalb der Kugel vom Radius  $R$  um den Koordinatenursprung verschwinden. Für genügend kleine Energie der einlaufenden Teilchen kann der differentielle Streuquerschnitt durch den Beitrag der S-Welle (d.h. der Partialwelle zum Drehimpuls  $l = 0$ ) angenähert werden. Bestimmen Sie die Streuphase  $\delta_0$  und den sich ergebenden differentiellen Wirkungsquerschnitt. Berechnen Sie weiterhin den totalen Wirkungsquerschnitt im Limes verschwindenden Impulses des einfallenden Teilchens.

Hinweis: Die radiale Schrödingergleichung für ein freies Teilchen mit Drehimpuls  $l$  wird gelöst durch Linearkombinationen  $a r j_l(kr) + b r n_l(kr)$  der sphärischen Besselfunktion  $j_l$  und der sphärischen Neuman-Funktion  $n_l$ .

### Aufgabe 34 - S-Wellenstreuung am Potentialtopf (6 Punkte)

Wir betrachten die S-Wellenstreuung an einem kugelsymmetrischen Potentialtopf

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & \text{für } 0 \leq r < R \\ 0 & \text{für } r \geq R \end{cases} \quad (5)$$

mit  $V_0 > 0$ .

- (a) Finden Sie eine Gleichung für die Streuphase  $\delta_0$ . Entwickeln Sie  $\delta_0$  zur ersten Ordnung in  $k$ . (3 Punkte)
- (b) Normieren wir die Wellenfunktion so, dass die Lösung im Außenraum exakt  $\sin(kr + \delta_0)$  lautet, so ergibt sich im Innenraum  $B \sin(k'r)$  mit einem gewissen  $k'$ . Zeigen Sie, dass

$$B^2 = \frac{k^2}{k^2 + k_0^2 \cos^2(k'R)} \quad \text{mit} \quad k_0 = \sqrt{2mV_0/\hbar^2}. \quad (6)$$

Resonanzen sind unter Anderem dadurch charakterisiert, dass die Aufenthaltswahrscheinlichkeit im Streuzentrum stark erhöht ist. Für welche Werte von  $k^2$  wird  $B^2$  in unserem Fall maximal. Hinweis: Bestimmen Sie zunächst den Maximalwert von  $B^2$ . (2 Punkte)

- (c) Angenommen, es gibt eine Resonanz mit  $kR \ll 1$ . Zeigen Sie, dass der S-Wellenbeitrag zum Wirkungsquerschnitt bei dieser Energie fast den maximalen Wert erreicht. (ein Punkt)

**Hinweise zum Thema Partialwellenstreuung:** Die Streuphase  $\delta_l$  liest man aus dem asymptotischen Verhalten der  $l$ -ten Partialwelle  $y_l$  ab.  $y_l$  ist diejenige Lösung der radialen Schrödingergleichung zum Drehimpuls  $l$ , welche im Ursprung (im Falle der harten Kugel: an der Kugeloberfläche) regulär und stetig ist. Das asymptotische Verhalten hat die Form  $y_l \sim \sin(kr - \pi l/2 + \delta_l)$ . Die Streuamplitude ergibt sich aus den Streuphasen nach

$$f_k(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i\delta_l} \sin(\delta_l) P_l(\cos \theta). \quad (7)$$

Der totale Wirkungsquerschnitt ist

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l. \quad (8)$$

**Hinweise zur Klausur:** Die Klausur findet statt

Dienstag, den 16.2. um 13:00 im **Hörsaal am Fasanengarten (Geb. 50.35)**

Die Bearbeitungszeit beträgt maximal 2.5 Stunden. Bitte bringen Sie Ihren Studentenausweis mit. Sie dürfen auch zwei handbeschriebene DIN A4-Seiten (Vorder- und Rückseite eines A4-Blattes) mit in die Klausur bringen. Fremdsprachige Studenten können zusätzlich ein Wörterbuch mitbringen. Es wird auch eine englischsprachige Version der Klausur geben. Die Rückgabe der Klausur und Ausgabe der Scheine erfolgt am

Dienstag, den 23.2. um 11:30 im Lehmann-Hörsaal

Bitte bringen Sie wiederum Ihren Studentenausweis mit.

Bei Bedarf wird eine Nachklausur angeboten. Diese würde am Nachmittag des 8.4.2010 stattfinden. Details werden noch bekanntgegeben.