Theoretische Physik E — Quantenmechanik II

V: Prof. Dr. D. Zeppenfeld, Ü: Dr. S. Gieseke

Übungsblatt 2

Abgabe: Fr, 5.11.'10, 11.30 Uhr, Erdgeschoss Physikhochhaus.

Aufgabe 5: Baker–Hausdorff Theorem [5]

Gegeben seien zwei Operatoren A, B mit den Eigenschaften $[A,[A,B]] = [B,[A,B]] = 0$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$[e^{-B}, A] = [A,B]e^{-B}\ .$$

Hinweis: Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = e^{-xB}Ae^{xB}$. Nach Differenzieren und Integrieren derselben bekommen Sie eine Identität, die Sie schließlich zur Behauptung führt.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von (a) das *Baker–Hausdorff–Theorem*

$$e^A e^B = e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A,B]}\ .$$

Hinweis: gehen Sie wieder vor wie in (a), diesmal jedoch mit einer Funktion $g(x) = e^{x(A+B)}e^{-xA}e^{-xB}$.

Aufgabe 6: Translationsoperator [5]

Untersuchen Sie den Translationsoperator

$$\mathcal{T}(\vec{\ell}) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{\ell}\right)\ .$$

(a) Zeigen Sie für beliebige Funktionen F und G, die durch eine Potenzreihe darstellbar sind, aufgrund der fundamentalen Vertauschungsrelation zwischen Ort und Impuls die beiden Relationen

$$[x_i, G(\vec{p})] = i\hbar\frac{\partial G(\vec{p})}{\partial p_i}\ , \qquad [p_i, F(\vec{x})] = -i\hbar\frac{\partial F(\vec{x})}{\partial x_i}\ .$$

(b) Bestimmen Sie damit den Kommutator $[x_i, \mathcal{T}(\vec{\ell})]$.

(c) Wie ändert sich der Erwartungswert $\langle \vec{x} \rangle$ bezüglich eines Zustandes $|\psi\rangle$ mit einer Translation $|\psi'\rangle = \mathcal{T}(\vec{\ell})|\psi\rangle$?

(b.w.)

Aufgabe 7: Darstellung von Drehimpulsoperatoren in 3 Dimensionen **[3]**

In der Vorlesung wurden die folgenden Generatoren G_i aus den bekannten Drehmatrizen abgeleitet,

$$G_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} , \quad G_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad G_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Zeigen Sie, dass die G_i tatsächlich die Drehimpulsalgebra erfüllen.

Aufgabe 8: Unitär äquivalente Darstellungen **[7]**

Eine übliche Darstellung der Drehimpulsoperatoren in 3 Dimensionen bekommt man direkt aus der Drehimpulsalgebra, wenn man in die $|\, jm \,\rangle$ Basis geht. Die Darstellungsmatrizen ℓ_i dieser Darstellung lauten dann

$$\ell_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \ell_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} , \quad \ell_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Auch die ℓ_i erfüllen natürlich die Drehimpulsalgebra. Daher müssen die ℓ_i und die G_i aus der vorherigen Aufgabe unitär äquivalent sein. Finden Sie die unitäre Transformation U, die die G_i in die ℓ_i überführt. Überprüfen Sie die Transformationen explizit, sobald Sie U gefunden haben.

$$\boldsymbol{\sum_{\mathbf{Blatt2}} = 20}$$