Theoretische Physik E — Quantenmechanik II

V: Prof. Dr. D. Zeppenfeld, Ü: Dr. S. Gieseke

Übungsblatt 3

Abgabe: Fr, 12.11.'10, 11.30 Uhr, Erdgeschoss Physikhochhaus.

Aufgabe 9: Kohärente Zustände **[5]**

Ein kohärenter Zustand des eindimensionalen harmonischen Oszillators ist als Eigenzustand des Vernichtungsoperators a definiert:

$$a \,|\, \phi \,\rangle = \phi \,|\, \phi \,\rangle \ .$$

(a) Konstruieren Sie einen normierten kohärenten Zustand $|\, \phi \,\rangle$ explizit in der Energiedarstellung indem Sie ihn aus dem Grundzustand $|\, 0 \,\rangle$ aufbauen. Der Eigenwert ϕ bleibt zunächst unbestimmt. Gelingt diese Konstruktion auch für $a^\dagger$?

(b) Zeigen Sie, dass der Translationsoperator aus der vorherigen Aufgabe aus dem Grundzustand einen kohärenten Zustand erzeugt. Welche Rolle spielt nun der Eigenwert ϕ?

Aufgabe 10: Bahndrehimpuls **[4]**

Ein Teilchen in einem kugelsymmetrischen Potential befinde sich in einem Eigenzustand $|\, l, m \,\rangle$ von $\vec{L}^2$ und L_z. Wie lauten die Erwartungswerte $\langle L_x \rangle$, $\langle L_y \rangle$, $\langle L_z \rangle$, $\langle L_x^2 \rangle$, $\langle L_y^2 \rangle$, $\langle L_z^2 \rangle$, bezüglich dieses Zustandes? Was bedeutet das semiklassisch?

Aufgabe 11: Drehoperatoren **[6]**

Wir betrachten allgemeine Drehungen um die Achse $\vec{\omega}$ mit dem Drehwinkel $\omega = |\vec{\omega}|$,

$$R(\vec{\omega})_{ij} = \frac{\omega_i \omega_j}{\omega^2} + \cos\omega \left(\delta_{ij} - \frac{\omega_i \omega_j}{\omega^2} \right) - \frac{\sin\omega}{\omega} \varepsilon_{ijk} \omega_k \ .$$

(a) Zeigen Sie, dass $R(\vec{\omega}) R(-\vec{\omega}) = 1$.

(b) Zeigen Sie, dass sich der Ortsoperator $\vec{r}$ unter einer unitären Transformation

$$U(\vec{\omega}) = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\omega}\cdot\vec{L}}, \qquad \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

unabhängig von der Darstellung bezüglich seiner Komponenten wie ein Vektor transformiert, also

$$U^\dagger(\vec{\omega})\, \vec{r}\, U(\vec{\omega}) = R(\vec{\omega})\, \vec{r} \ .$$

Verwenden Sie dazu das Baker–Hausdorff Theorem in der allgemeineren Fassung

$$e^B A e^{-B} = \sum_{n-0}^{\infty} \frac{1}{n!} A_n, \qquad A_n = [\, B, A_{n-1} \,], \qquad A_0 = A \ .$$

(b.w.)

Aufgabe 12: Pauli–Matrizen und Drehungen **[5]**

(a) Zeigen Sie, dass jede unitäre Matrix U mit $\det U = +1$ (unimodular) in zwei Dimensionen (also jedes Element der $SU(2)$) in der Form

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \quad |a|^2 + |b|^2 = 1$$

geschrieben werden kann. Darin sind $a, b \in \mathbb{C}$ (Cayley–Klein Parameter).

(b) Eine allgemeine Spin–$\frac{1}{2}$–Drehung kann auch mit Hilfe von Euler–Winkeln als $U(\alpha, \beta, \gamma)$ parametrisiert werden. Wie lautet der Zusammenhang zwischen den Cayley–Klein–Parametern aus Teil (a) und den Euler–Winkeln (mit Rechnung)?

(c) Ebenso lässt sich eine allgemeine Drehung als $U(\vec{\omega}) = \exp(-i\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{\omega}}{2})$ schreiben. Darin beschreiben $\omega = |\vec{\omega}|$ und $\hat{\omega} = \vec{\omega}/\omega$ die Drehachse bzw. den Drehwinkel und σ_i sind die Pauli–Matrizen. Drücken Sie ω und $\hat{\omega}$ durch die Euler–Winkel aus Teil (b) aus. Testen Sie in Ihrem Ergebnis auch, ob $\hat{\omega}^2 = 1$.

$\sum_{\mathbf{Blatt3}} = \mathbf{20}$