Theoretische Physik E — Quantenmechanik II

V: Prof. Dr. D. Zeppenfeld, Ü: Dr. S. Gieseke

Übungsblatt 4

Abgabe: Fr, 19.11.'10, 11.30 Uhr, Erdgeschoss Physikhochhaus.

Aufgabe 13: Drehimpulse und Oszillatoren **[5]**

Wir untersuchen ein System von zwei unabhängigen harmonischen Oszillatoren (im folgenden durch +, - benannt) mit Erzeugungs– und Vernichtungsoperatoren $a^\dagger_\pm, a_\pm$, die die üblichen Vertauschungsrelationen erfüllen. Damit definieren wir die Operatoren

$$J_\pm = \hbar a^\dagger_\pm a_\mp, \qquad J_z = \frac{\hbar}{2}\left(a^\dagger_+ a_+ - a^\dagger_- a_-\right), \qquad N = N_+ + N_- = a^\dagger_+ a_+ + a^\dagger_- a_- \ .$$

Zeigen Sie, dass die $J_\pm$, J_z eine Drehimpulsalgebra erfüllen, also

$$[\, J_z, J_\pm \,] = \pm\hbar J_\pm, \qquad \left[\vec{J}^2, J_z\right] = 0, \qquad [\, J_+, J_- \,] = 2\hbar J_z \ .$$

Zeigen Sie weiterhin, dass

$$\vec{J}^2 = \hbar^2 \frac{N}{2}\left(\frac{N}{2} + 1\right), \qquad (\vec{J}^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2).$$

Damit müsste es also einen Zusammenhang zwischen der Besetzungszahldarstellung $|\, n_+, n_- \,\rangle$ und der Drehimpulsdarstellung $|\, j, m \,\rangle$ von Zuständen dieses Systems geben. Wie lautet dieser Zusammenhang und wie lassen sich damit Drehimpulse ganz allgemein deuten?

Aufgabe 14: $SU(2)$ und $O(3)$ **[5]**

(a) Zeigen Sie, dass jede hermitesche, spurlose 2×2–Matrix P als $P = \vec{p} \cdot \vec{\sigma}$ geschrieben werden kann. Darin sind σ_i die Pauli–Matrizen und $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$.

(b) Solch eine Matrix werde nun mit einer unitären Matrix $U \in SU(2)$ transformert, $P' = U^{-1}PU$. Zeigen Sie, dass $P' = \vec{p}\,' \cdot \vec{\sigma}$ mit $\vec{p}\,' \in \mathbb{R}^3$ und berechnen Sie $\det P$ sowie $\det P'$. Begründen Sie aus Ihren Ergebnissen, dass sich $\vec{p}$ wie ein dreidimensionaler Vektor unter Drehungen transformiert.

(c) Wenn nun also U für $\vec{p}$ eine "gewöhnliche" Drehung R induziert, also $p'_i = R_{ij} p_j$, dann sollte es einen Zusammenhang zwischen R und U geben. Drücken Sie die Matrixelemente R_{ij} mit Hilfe der Pauli–Matrizen durch U aus. Ist diese Zuordnung eindeutig?

(b.w.)

Aufgabe 15: Clebsch–Gordan Koeffizienten **[5]**

Ein System sei aus zwei Spin–1 Systemen zusammengesetzt. Wie lauten die Eigenzustände des Gesamtdrehimpulses, $|\, jm\,\rangle$, ausgedrückt als Linearkombinationen der gekoppelten $|\,1m_1\,\rangle\,|\,1m_2\,\rangle$–Zustände? Mit anderen Worten: bestimmen Sie die Clebsch–Gordan Koeffizienten für $1 \otimes 1 = 0 \oplus 1 \oplus 2$. Beachten Sie die Condon–Shortley Konvention. Sie können die Koeffizienten für $|\, j - m\,\rangle$ aus denen für $|\, jm\,\rangle$ durch bekannte Symmetrien bestimmen. Als letzten Zustand werden Sie vermutlich $|\,00\,\rangle$ berechnen. J_- auf diesen angewandt sollte 0 ergeben. Überprüfen Sie das. (Bei der Gelegenheit lohnt es sich herauszufinden, was Alfred Clebsch mit dem Polytechnikum Karlsruhe zu tun hatte.)

Aufgabe 16: Wigner–Matrizen **[5]**

Die Wigner–Matrizen $d^{(j)}_{m'm}(\beta)$ lassen sich für beliebiges j sukzessiv aus den $d^{(\frac{1}{2})}_{m'm}(\beta)$ und den Clebsch–Gordan–Koeffizienten (CGKs) berechnen. Bestimmen Sie so die gesamte Wigner Matrix für $j = 1$ aus der Matrix für $j = 1/2$,

$$d^{\frac{1}{2}}_{m'm}(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\beta}{2} & -\sin\frac{\beta}{2} \\ \sin\frac{\beta}{2} & \cos\frac{\beta}{2} \end{pmatrix}$$

und den dazugehörigen CGKs.

$$\overline{\textstyle\sum_{\mathbf{Blatt4}} = \mathbf{20}}$$