

Theoretische Physik E — Quantenmechanik II

V: Prof. Dr. D. Zeppenfeld, Ü: Dr. S. Gieseke

Übungsblatt 5

Abgabe: Fr, 26.11.'10, 11.30 Uhr, Erdgeschoss Physikhochhaus.

Aufgabe 17: $\Delta^+ \rightarrow N\pi$ Verzweigungsverhältnisse

[5]

Δ -Teilchen sind Baryonen, die wie das Proton und Neutron durch ihre Zusammensetzung aus u und d Quarks charakterisiert werden. Die wichtigsten Quantenzahlen für die Charakterisierung und Unterscheidung von den Nukleonen, sind der Isospin $\vec{I}$ und die z -Komponente des Isospins. Eine wichtige Eigenschaft der starken Wechselwirkung ist die Erhaltung des Isospins. Isospinoperatoren genügen den Drehimpulsvertauschungsrelationen $[I_i, I_j] = i\epsilon_{ijk}I_k$. Isospinsymmetrie bedeutet schließlich, dass Zustände ganz analog zur Rotationssymmetrie durch kets $|I, I_z\rangle$ charakterisiert werden.

Die Δ -Baryonen sind allesamt Teilchen im $I = \frac{3}{2}$ Quartett,

$$|\Delta^{++}\rangle = |\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle, \quad |\Delta^+\rangle = |\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle, \quad |\Delta^0\rangle = |\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle, \quad |\Delta^-\rangle = |\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\rangle.$$

Das Δ^+ zerfällt praktisch zu 100% in ein Nukleon (Proton oder Neutron, Isospin $I = \frac{1}{2}$) und ein Pion (das leichteste Meson, $I = 1$). Es gilt im Detail

$$|\pi^\pm\rangle = |1, \pm 1\rangle, \quad |\pi^0\rangle = |1, 0\rangle, \quad |p\rangle = |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle, \quad |n\rangle = |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle.$$

Aufgrund der Ladungserhaltung sind nur die beiden Zerfallskanäle

$$\Delta^+ \rightarrow p\pi^0 \quad \text{und} \quad \Delta^+ \rightarrow n\pi^+$$

möglich. Berechnen Sie aufgrund der gegebenen Analogie zur Drehimpulskopplung, in welchem Verhältnis die beiden Zerfälle auftauchen.

Hinweis: Die Zerfallswahrscheinlichkeit wird aus der Übergangsamplitude

$$\langle N\pi | H_s | \Delta \rangle$$

berechnet. Darin ist H_s der Hamiltonoperator der starken Wechselwirkung. H_s ist ein $I = 0$ Tensoroperator (isoskalar).

Aufgabe 18: Messprozess im Spin $\frac{1}{2}$ -System

[5]

Ein System sei in einem Eigenzustand von $\vec{S} \cdot \vec{n}$, wobei $\vec{S} = \frac{\hbar\vec{\sigma}}{2}$ wie in Aufgabe 9 definiert sind. Der Einheitsvektor $\vec{n}$ liegt in der xz -Ebene mit einem Winkel γ zur z -Achse. Mit welcher Wahrscheinlichkeit finden Sie das System bei einer Messung im Zustand $|-\rangle$? Wie lautet die Varianz Ihrer Messung, also $\langle (S_z - \langle S_z \rangle)^2 \rangle$? Überzeugen Sie sich von Ihrem Ergebnis, indem Sie die Werte $\gamma = 0, \pi/2$ einsetzen. Das alles können Sie durch ein einfaches Lösen des Eigenwertproblems von $\vec{S} \cdot \vec{n}$ berechnen. Sie können den Eigenvektor auch (einfacher) mit Hilfe einer Drehung bestimmen. Wie? Überprüfen Sie explizit, ob die Eigenvektoren gleich sind.

(b.w.)

Aufgabe 19: Drehimpuls als Tensoroperator**[1 + 2 + 2 = 5]**

Wir betrachten den Drehimpulsoperator J_q mit den Komponenten

$$J_{\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(J_x \pm iJ_y) = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}J_{\pm}, \quad J_0 = J_z.$$

- (a) Zeigen Sie, dass die J_q sphärische Tensoroperatoren vom Rang 1 sind ($T_q^{(1)}$).
- (b) Berechnen Sie die reduzierten Matrixelemente $\langle \alpha' j' || J_q || \alpha j \rangle$.
Hinweis: $\langle j1; m_1 = j, m_2 = 0 | j1; j, m = j \rangle = \sqrt{j/(j+1)}$.
- (c) Berechnen Sie $J'_q = d_{qp}^{(1)} J_p$ mit Hilfe der Wigner-Matrix aus Aufgabe 16. Zeigen Sie, dass Ihr Ergebnis mit der Erwartung für eine Drehung der Komponenten J_x, J_y, J_z um den Winkel β um die y -Achse übereinstimmt.

Aufgabe 20: Sphärische Tensoren und Kugelflächenfunktionen**[2 + 3 = 5]**

- (a) Schreiben sie xy, xz und $(x^2 - y^2)$ als Komponenten eines irreduziblen sphärischen Tensoroperators vom Rang 2. *Hinweis:* die Kugelflächenfunktionen Y_ℓ^m sind irreduzible sphärische Tensoroperatoren vom Rang ℓ . Schreiben Sie die in Frage kommenden Y_ℓ^m in kartesischen Koordinaten.
- (b) Das Quadrupolmoment lässt sich als der Erwartungswert

$$Q = e \langle \alpha, j, m = j | 3z^2 - r^2 | \alpha, j, m = j \rangle$$

schreiben. Drücken Sie das Matrixelement

$$M = e \langle \alpha, j, m' | x^2 - y^2 | \alpha, j, m = j \rangle$$

(mit $m' = j, j-1, \dots$) durch Q und geeignete Clebsch-Gordan Koeffizienten aus.

 $\Sigma_{\text{Blatt5}} = 20$