**KIT** **WS 2010/11**

# Theoretische Physik E — Quantenmechanik II

V: Prof. Dr. D. Zeppenfeld, Ü: Dr. S. Gieseke

## Übungsblatt 6

Abgabe: Fr, 3.12.'10, 11.30 Uhr, Erdgeschoss Physikhochhaus.

**Aufgabe 21: Sphärische Tensoroperatoren** **$[(0) + (1 + 2 + 2) = 5]$**

Wir betrachten zwei Vektoren (Operatoren) $\vec{U} = (U_x, U_y, U_z)$ und $\vec{V} = (V_x, V_y, V_z)$.

(a) Wie lauten sphärische Tensoroperatoren vom Rang 1 (Vektoroperatoren), ausgedrückt durch die Komponenten von nur einem Vektor $\vec{U}$ bzw. $\vec{V}$ (s. auch Aufgabe 19)?

(b) Konstruieren Sie sphärische Tensoroperatoren vom Rang 0, 1 und 2 aus der Kopplung der zwei verschiedenen Vektoren $\vec{U}$ und $\vec{V}$. Schreiben Sie Ihre Ergebnisse in einfacher Form ausgedrückt durch die kartesischen Komponenten von $\vec{U}$ und $\vec{V}$.

Finden Sie einen Zusammenhang zu der üblichen Zerlegung von $U_i V_j$ der Gestalt „Skalar + antisymmetrischer Tensor + symmetrischer Tensor"?

**Aufgabe 22: Magnetisches Moment und Projektionstheorem** **$[3 + 2 = 5]$**

Wir untersuchen ein System, in dem der Gesamtdrehimpuls $\vec{J}$ aus zwei Drehimpulsen $\vec{J}_1$ und $\vec{J}_2$ zusammengesetzt ist, $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$. Das gesamte magnetische Moment dieses Systems ist durch $\vec{\mu} = \alpha\vec{J}_1 + \beta\vec{J}_2$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie die Erwartungswerte von $\mu_x, \mu_y, \mu_z$, wenn sich das System in einem Zustand $|\, j_1 j_2; jm \,\rangle$ befindet.

(b) Das System sei nun ein Elektron mit Spin $s = 1/2 = j_1$, Bahndrehimpuls $\ell = 2 = j_2$ und dem Gesamtdrehimpuls $j = 3/2$. Zum Beispiel ein Atom in einem ${}^2D_{3/2}$ Zustand. Bestimmen Sie für alle möglichen Werte von $J_z = \hbar m$ den Erwartungswert von $\mu_z$. Beachten Sie: das magnetische Moment des Elektrons enthält den Faktor $g = 2$.

**Aufgabe 23: Harmonischer Oszillator mit Störung** **[5]**

Ein eindimensionaler harmonischer Oszillator mit Frequenz $\omega$ bekommt einen Störterm

$$V = \tfrac{1}{2}\epsilon m\omega^2 x^2 \,.$$

Bestimmen Sie den gestörten Grundzustand in erster und dessen Energieeigenwert in zweiter Ordnung der zeitunabhängigen Störungsrechnung. Sie können das Problem auch exakt lösen. Wie vergleicht sich Ihr Ergebnis für das gestörte Energieniveau mit dem exakten Ergebnis für $\epsilon \to 0$?

*(b.w.)*

**Aufgabe 24: Zwei–Nukleonen–System** **[5]**

Ein System aus zwei Nukleonen mit Spin $\frac{1}{2}$ wird durch die Wechselwirkung

$$V(\vec{r}) = V_1(r) + \frac{1}{\hbar^2} V_2(r)\,\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 + \frac{1}{\hbar^2} V_3(r)\,\vec{L} \cdot \vec{S}$$

beschrieben. Welche Quantenzahlen charakterisieren das System (warum?) und wie muss die Wellenfunktion des Systems zusammengefügt werden? Der Bahndrehimpuls $\ell$ wird zu den 'guten' Quantenzahlen gehören, da das System rotationssymmetrisch ist. Welche Werte können die weiteren Quantenzahlen für $\ell = 0$ und $\ell = 1$ unter Berücksichtigung des Pauli–Prinzips annehmen? Was können Sie dann über das Spektrum aussagen?

*Hinweis:* Das Pauli–Prinzip kommt allgemein erst später dran und besagt, dass die Gesamtwellenfunktion von Fermionen antisymmetrisch unter Austausch zweier Teilchen ist. Erinnern Sie sich auch daran, dass Sie die Symmetrie der Bahndrehimpulseigenfunktionen aus der Parität der Kugelflächenfunktionen $Y^{\ell}_{m}(\vec{n})$ ablesen können.

$\boldsymbol{\sum_{\text{Blatt6}} = 20}$