KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE WS 11/12
INSTITUT FÜR THEORETISCHE FESTKÖRPERPHYSIK
Prof. Dr. Gerd Schön, Dr. Michael Marthaler **18.10.11**
http://www.tfp.kit.edu/studium-lehre_415.php

Übungsblatt Nr. 1 zur Vorlesung Quantenmechanik II

1 Baker-Hausdorff

Gegeben sind zwei Operatoren A und B mit der Eigenschaft, $[[A,B],A] = 0 = [[A,B],B]$.

a) Zeigen sie durch vollständige Induktion dass gilt,

$$[A^n, B] = nA^{n-1}[A,B]\,. \tag{1}$$

b) Zeigen Sie dass gilt

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-[A,B]/2}\,. \tag{2}$$

Ein möglicher Weg besteht in der Definition eines Operators $G(\lambda) = e^{\lambda A} e^{\lambda B}$. Mit der Ableitung von $G(\lambda)$ nach λ lässt sich eine homogene Differentialgleichung für $G(\lambda)$ bilden. Durch diese lässt sich obige Relation beweisen.

2 Eigenwerte und Eigenvektoren eines Operators

Betrachten Sie in einem dreidimensionalen Vektorraum den Operator, der in einer orthonormierten Basis $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$ durch folgende Matrix gegeben ist:

$$H = \frac{\hbar\omega_0}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

a) Berechnen sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix.

b) Zeigen sie das die Eigenvektoren der Orthogonalitätsbedingung und der Vollständigkeitsrelation genügen.

Bitte wenden ...

$\boxed{3}$ δ-Funktions-Doppelmuldenpotential

Betrachten Sie einen Doppelmulden-Potentialtopf $V(x) = -c\,[\delta(x) + \delta(x-d)]$, $c > 0$.

a) Lösen Sie die Schrödinger-Gleichung für $E < 0$ und zeigen Sie, dass die Energien der gebundenen Zustände durch $E = -\hbar^2\rho^2/2m$, wobei ρ die Lösung der Gleichung

$$e^{-\rho d} = \pm\left(1 - \frac{\rho\hbar^2}{mc}\right) \tag{4}$$

ist, gegeben sind.

b) Finden sie die Energien aller Eigenzustände für die Grenzfälle $\rho d \ll 1$ und $\rho d \gg 1$. Für welche Abstände d existiert nur ein Eigenzustand mit $E < 0$?