Prof. Dr. Gerd Schön, Dr. Michael Marthaler **25.10.11**

http://www.tfp.kit.edu/studium-lehre_415.php

Übungsblatt Nr. 2 zur Vorlesung Quantenmechanik II

4 Harmonischer Oszillator

Betrachten sie den eindimensionalen harmonischen Oszillator mit dem Hamilton-Operator,

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{m\omega^2}{2}x^2 \ , \ [p,x] = -i\hbar \, . \tag{1}$$

Zum Übergang in die Besetzungszahlen-Darstellung definiert man die Auf- und Absteigeoperatoren $a^\dagger$, a als,

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left(\sqrt{m\omega}x + \frac{i}{\sqrt{m\omega}}p\right) \ , \ a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left(\sqrt{m\omega}x - \frac{i}{\sqrt{m\omega}}p\right) \, . \tag{2}$$

a) Berechnen sie den Kommutator $[a, a^\dagger]$ und drücken sie H, x und p durch a,$a^\dagger$ sowie durch $N = a^\dagger a$ aus. Zeigen sie nun das die Operatoren a,$a^\dagger$ auf die Energieeigenzustände $|n\rangle$ von H wirken wie $a^\dagger|n\rangle = c'|n+1\rangle$ und $a|n\rangle = c|n-1\rangle$. Bestimmen sie die beiden Konstanten c, c'.

b) Der eindimensionale Oszillator sei zur Zeit $t = 0$ durch den Zustand

$$|\phi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|n\rangle + |n+1\rangle\right) \tag{3}$$

gegeben. Berechnen sie für den Zustand $|\phi(t)\rangle$ die Erwartungswerte $\langle H\rangle$, $\langle x\rangle$, $\langle x^2\rangle$, $\langle p^2\rangle$, $(\Delta x)^2$, $(\Delta p)^2$, zu beliebigen Zeiten $t > 0$ und überprüfen sie die Unschärferelation $\Delta x \Delta p > \hbar/2$.

c) Transformieren sie die Operatoren a und $a^\dagger$ in das Heisenberg-Bild und finden sie eine explizite Form für die Zeitabhängigkeit der Operatoren. Berechnen sie nun im Heisenberg-Bild die Erwartungswerte $\langle x(t)\rangle$ und $\langle p(t)\rangle$ für den Zustand $|\phi(0)\rangle$.

5 Messprozess an einem Spin-1/2:

Der Spin-Operator $\vec{S}$ kann durch die Pauli-Matrizen ausgedrückt werden, $S_i = \hbar\sigma_i/2$, mit

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Ein Teilchen sei im Zustand

$$|\phi\rangle = \alpha\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

präpariert, wobei α und β reelle Zahlen sind.

a) Wir messen die Observable σ_z. Welche Werte ergeben sich mit welcher Wahrscheinlichkeit? Berechnen sie nun auch $\langle\sigma_z\rangle$.

b) Dieses mal wird die Observable σ_x gemessen, wobei das Teilchen wieder im Zustand $|\phi\rangle$ ist. Welche Werte ergeben sich nun mit welcher Wahrscheinlichkeit?

c) Das Teilchen ist wieder im Zustand $|\phi\rangle$. Nun messen wir zuerst σ_z und danach σ_x. Welche Kombinationen aus gemessenen Werten sind möglich mit welcher Wahrscheinlichkeit? Welche Werte mit welcher Wahrscheinlichkeit sind möglich, wenn zuerst σ_x und dann σ_z gemessen wird?

Bitte wenden ...

6 **Translationsoperator**

Untersuchen sie den Translationsoperator in einer Dimension,

$$\mathcal{T}(d) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} p\, d\right) . \tag{5}$$

a) Zeigen sie für beliebige Funktionen der Operatoren x und p, $F(x)$ und $G(p)$, die durch eine Potenzreihe darstellbar sind, die beiden Relationen

$$[x, G(p)] = i\hbar \frac{\partial G(p)}{\partial p} \quad , \quad [p, F(x)] = -i\hbar \frac{\partial F(x)}{\partial x} . \tag{6}$$

Verwenden sie hierbei nur Kommutator Relationen und identifizieren sie erst das Ergebnis mit der Ableitung nach p oder x.

b) Wie ändert sich der Erwartungswert $\langle x \rangle$ bezüglich eines Zustandes $|\psi\rangle$ mit einer Translation $|\psi'\rangle = \mathcal{T}(d)|\psi\rangle$.

7 **Landau-Niveaus**

Wir betrachten ein freies Teilchen in einem Magnetfeld in z-Richtung mit dem Hamiltonian

$$H = \frac{1}{2m} (\vec{p} - q\vec{A})^2 . \tag{7}$$

Wir nehmen an, dass das Teilchen sich nur in zwei Dimensionen bewegt (x-y-Ebene) und wählen die Eichung

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ Bx \\ 0 \end{pmatrix} . \tag{8}$$

Finden sie die Eigenzustände durch einen Separations Ansatz. Setzen sie in y-Richtung ebene Wellen an und lösen sie dann die resultierende Eigenwert-Gleichung in x-Richtung.