Karlsruher Institut für Technologie | WS 11/12
Institut für theoretische Festkörperphysik
Prof. Dr. Gerd Schön, Dr. Michael Marthaler | **15.11.11**
http://www.tfp.kit.edu/studium-lehre_415.php

Übungsblatt Nr. 4 zur Vorlesung Quantenmechanik II

11 Rabi-Oszillationen

Wir betrachten ein Spin-1/2 Teilchen in einem statischen Feld $B_0\vec{e}_z$ und einem zusätzlichen Wechselfeld.

a) Die Zeitentwicklung eines Spin-1/2 Teilchens wird beschrieben durch den Hamilton-Operator

$$H(t) = -\frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z + \frac{1}{2}\hbar\Omega_R^{(0)}\left(\sigma_x \sin\omega t + \sigma_y \cos\omega t\right) . \tag{1}$$

Zeigen sie, dass nach der unitären Transformation $|\psi'\rangle = U(t)|\psi\rangle$, mit $U(t) = e^{i\omega\sigma_z t/2}$, in Resonanz, $\omega_0 = \omega$, die Zeitentwicklung von $|\psi\rangle$ beschrieben wird durch

$$H' = \frac{\hbar}{2}\Omega_R^{(0)}\sigma_y . \tag{2}$$

b) Das Spin-1/2 Teilchen ist zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand

$$|\psi(t=0)\rangle = |+\rangle . \tag{3}$$

Berechnen sie nun die Zeitentwicklung des Zustandes $|\psi(t=0)\rangle$ und den Erwartungswert $\langle\sigma_z\rangle$.

12 Messprozess an einem Spin-1/2

Wir betrachten ein Spin-1/2 Teilchen im Magnetfeld,

$$H = -\frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z . \tag{4}$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei das Teilchen im Zustand

$$|\psi(0)\rangle = \alpha|-\rangle + \beta|+\rangle , \tag{5}$$

präpariert, wobei α und β reelle Zahlen sind und $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

a) Wir messen die Observable σ_z zum Zeitpunkt $t_1 > 0$ und σ_x zum Zeitpunkt $t_2 > t_1$. Welche Werte ergeben sich mit welcher Wahrscheinlichkeit?

b) Dieses mal wird die Observable σ_x zum Zeitpunkt $t_1 > 0$ gemessen und dann σ_z zum Zeitpunkt $t_2 > t_1$. Welche Werte ergeben sich mit welcher Wahrscheinlichkeit?

Bitte wenden ...

13 Zeitabhängige Störtheorie höherer Ordnung

Wir betrachten ein System mit einer zeitabhängigen Störung

$$H = H_0 + V(t), \tag{6}$$

wobei für den zeitunabhängigen Teil H_0 die Eigenwerte und Eigenzustände bekannt seien. In den Vorlesungen haben sie die Übergangsrate Γ_{if} von einem Anfangszustand $|i\rangle$ in einen Endzustand $|f\rangle$ für eine zeitabhängige periodische Störung $V(t) = Ve^{\epsilon t}e^{-i\omega t}$, berechnet. In dieser Aufgabe betrachten wir einen Fall, in dem der erste nichtverschwindende Term in der Störungsentwicklung von zweiter Ordnung ist.

a) Wiederholen Sie die Rechnung aus der Vorlesung für den Störungsterm in 2ter Ordnung im Zeitentwicklungsoperator,

$$\left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{-\infty}^{t} dt' \int_{-\infty}^{t'} dt''\, V_I(t')V_I(t'') \;,\; V_I(t) = e^{iH_0 t/\hbar}V(t)e^{-iH_0 t/\hbar}\,, \tag{7}$$

mit der Störung

$$V(t) = Ve^{\epsilon t}\cos(\omega t). \tag{8}$$

Nehmen sie dabei an, dass die Matrixelemente $\langle z|V|i\rangle$ für alle Zustände $|z\rangle$ mit $E_z - E_i = \pm\hbar\omega$ verschwinden. Wie lautet für diesen Fall die Übergangsrate Γ_{if} (nehmen sie dabei die Ableitung der Übergangsamplitude zu einem beliebigen Zeitpunkt t).

b) Bilden sie den Limes $\epsilon \to 0$ und mitteln sie über eine Schwingungsperiode. Wie lautet für diesen Fall Γ_{if}? Zeigen sie, dass nur Terme proportional zu $\delta(E_f - E_i \pm 2\hbar\omega)$ und zu $\delta(E_f - E_i)$ übrigbleiben.