KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE WS 11/12
INSTITUT FÜR THEORETISCHE FESTKÖRPERPHYSIK
Prof. Dr. Gerd Schön, Dr. Michael Marthaler **06.12.11**
http://www.tfp.kit.edu/studium-lehre_415.php

Übungsblatt Nr. 7 zur Vorlesung Quantenmechanik II

[Hinweis: Die erste Klausur findet am Dienstag, dem 13. Dezember, von 17:45-19:45 Uhr im Gerthsen-Hörsaal statt. Bitte bringen Sie ihren Studentenausweis mit. Als Hilfsmittel ist eine handbeschriebene A4-Seite (beidseitig) zugelassen. Die Ausgabe der Klausuren erfolgt am 20. Dezember in den Übungen.]

22 Atom gekoppelt an eine Mode des elektrischen Feldes

Ein Atom das an eine Mode des elektrischen Feldes gekoppelt ist wird beschrieben durch den Hamilton-Operator,

$$H = H_0 + H_1 \ , \ H_0 = \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z + \hbar\omega a^\dagger a \ , \ H_1 = \hbar g \sigma_x (a^\dagger + a) \,. \tag{1}$$

Wobei wir in dieser Aufgabe H_1 als einen Störterm behandeln. Die Eigenzustände des Strahlungsfeldes sind die bekannten Fock-Zustände $a^\dagger a|n\rangle = n|n\rangle$ und die des Atoms sind gegeben durch $|+\rangle$ und $|-\rangle$, mit $\sigma_z|\pm\rangle = \pm|\pm\rangle$, $\sigma_x|\pm\rangle = |\mp\rangle$, $\sigma_\pm|\mp\rangle = |\pm\rangle$ und $\sigma_\pm|\pm\rangle = 0$.

a) Nehmen sie an, dass $\omega_0 = \omega$ gilt. Berechnen sie die Eigenenergien in erster Ordnung und die dazu gehörenden Eigenzustände in nullter Ordnung entarteter Störtheorie in H_1. Zeige sie, dass die Eigenzustände die gleichen sind wie die des Hamilton-Operators, $H_{\mathrm{JC}} = \hbar\omega_0\sigma_z/2 + \hbar\omega a^\dagger a + \hbar g(\sigma_- a^\dagger + \sigma_+ a)$.

b) Berechnen sie nun die Korrektur zu den Eigenzuständen in erster Ordnung entarteter Störtheorie.

23 Atom im Strahlungsfeld

Wir verallgemeinern nun den Hamilton-Operator der letzten Aufgabe. Damit wir die Wechselwirkung eines Atoms (am Platz $\vec{r}_0 = \vec{0}$) mit mehreren Feldmoden mit den Wellenvektoren $\vec{k}$ beschreiben können, verwenden wir:

$$H' = H_0' + H_1' \quad , \quad H_0' = \sum_{\vec{k}} \hbar\omega_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} + \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z \qquad , \qquad H_1' = \sum_{\vec{k}} \hbar g_{\vec{k}} \left(\sigma_+ a_{\vec{k}} + a_{\vec{k}}^\dagger \sigma_-\right) . \tag{2}$$

wobei $g_{\vec{k}}$ reell ist.

a) Schreiben Sie den Operator H_1' im Wechselwirkungsbild bezüglich H_0' (d.h. berechnen Sie $e^{iH_0't/\hbar} H_1' e^{-iH_0't/\hbar}$).

b) Berechnen Sie unter Verwendung der Goldenen Regel der Quantenmechanik die Übergangsraten $\Gamma_{\substack{+\to-\\ n\to n'}}$ sowie $\Gamma_{\substack{-\to+\\ n\to n'}}$. Die Indizes n und n' symbolisieren hier die Verteilung der Photonenzahlen auf die Moden $n \equiv \{n_{\vec{k}}\}$, $n' \equiv \{n'_{\vec{k}}\}$. Zeigen sie zuerst, dass diese Raten geschrieben werden können in der Form,

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\substack{+\to-\\ n\to n'}} &= 2\pi \sum_{\vec{k}} |\langle -, \{n'_{\vec{k}}\}| g_{\vec{k}} \sigma_- a_{\vec{k}}^\dagger |+, \{n_{\vec{k}}\}\rangle|^2 \delta(\omega_0 - \omega_{\vec{k}}) \,, \\
\Gamma_{\substack{-\to+\\ n\to n'}} &= 2\pi \sum_{\vec{k}} |\langle +, \{n'_{\vec{k}}\}| g_{\vec{k}} \sigma_+ a_{\vec{k}} |-, \{n_{\vec{k}}\}\rangle|^2 \delta(\omega_0 - \omega_{\vec{k}}).
\end{aligned}$$

Summieren sie die Raten über alle möglichen Endzustände des Strahlungsfeldes $\{n'_{\vec{k}}\}$. Vereinfachen sie das Ergebniss, indem sie den Übergang von einem diskreten zu einem kontinuierlichen Strahlungsfeld machen, $\sum_{\vec{k}} = V \int \frac{d^3k}{(2\pi)^2}$, und verwenden sie die Dispersionsrelation $\omega_{\vec{k}} = c|\vec{k}|$.

Bitte wenden ...

$\boxed{24}$ **Normalkoordinaten:**

Wir betrachten N Teilchen der Masse m. Jedes Teilchen befindet sich in einem harmonischen Potential und ist mit seinem nächsten Nachbar durch ein harmonisches Potential gekoppelt,

$$H = \sum_{n=1}^{N} \left[\frac{1}{2m} p_n^2 + \frac{m\Omega^2}{2} (q_n - q_{n-1})^2 + \frac{m\Omega_0}{2} q_n^2 \right] . \tag{3}$$

Wir wählen periodische Randbedingungen, $q_0 = q_N$. Impuls und Koordinate folgen den kanonischen Vertauschungsregeln,

$$[q_n, p_m] = i\delta_{nm}\hbar \ , \ [q_n, q_m] = 0 \ , \ [p_n, p_m] = 0 \ . \tag{4}$$

Der Hamilton-Operator kann durch die Transformation,

$$q_n = \frac{1}{(mN)^{1/2}} \sum_k e^{ikan} Q_k \quad , \quad p_n = \left(\frac{m}{N}\right)^{1/2} \sum_k e^{-ikan} P_k \tag{5}$$

diagonalisiert werden. Um die periodischen Randbedingungen zu erfüllen muss gelten,

$$k = \frac{2\pi l}{Na} \quad , \quad -\frac{N}{2} < l \leq \frac{N}{2} \, , \tag{6}$$

mit ganzzahligem l und wir haben angenommen das N gerade ist.

a) Zeigen sie, dass Q_k und P_k auch den kanonischen Vertauschungsrelationen folgen,

$$[Q_k, P_{k'}] = i\delta_{kk'}\hbar \, . \tag{7}$$

b) Zeigen sie, dass sich der Hamilton-Operator in folgender Form schreiben lässt,

$$H = \frac{1}{2} \sum_k \left[P_k P_k^\dagger + \omega_k^2 Q_k Q_k^\dagger \right] \, , \tag{8}$$

mit $\omega_k^2 = \Omega^2 \left[2 \sin(ka/2)\right]^2 + \Omega_0^2$.