Karlsruher Institut für Technologie
Institut für theoretische Festkörperphysik

WS 11/12

Prof. Dr. Gerd Schön, Dr. Michael Marthaler, Dr. Jens Michelsen

11.01.12

http://www.tfp.kit.edu/studium-lehre_415.php

Übungsblatt Nr. 9 zur Vorlesung Quantenmechanik II

29 **Dephasierung durch Wechselwirkung mit Bad.** Betrachten wir ein Spin-1/2-System, das an einen harmonischen Oszillator (oder eine Mode des Strahlungsfeldes) durch σ_z gekoppelt ist:

$$H = \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z + \hbar\omega a^\dagger a + \sigma_z \hbar g(a^\dagger + a) \tag{1}$$

a) Transformieren Sie den Hamilton-Operator mit Hilfe eines Verschiebeoperators: $\hat{H}' = \hat{D}^\dagger(\hat{\sigma}_z\alpha)\hat{H}\hat{D}(\hat{\sigma}_z\alpha)$, wobei $\hat{D}(\hat{\sigma}_z\alpha) = e^{\hat{\sigma}_z(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a})}$. Zeigen Sie, dass durch die Wahl $\alpha = \alpha^* = -(g/\omega)$, der Kopplungsterm in dem transformierten Hamilton-Operator verschwindet. Hier sollte man sich aber erinnern, dass durch die Transformation auch die basis der Zustände geändert wurde. Durch die Transformation zwischen den Basen werden die Zustände verschränkt. Drücken Sie den Zeitentwicklungs-Operator in der alten Basis durch den Zeitentwicklungs-Operator in der neuen Basis ($e^{-\frac{i}{\hbar}H't}$) und den Verschiebeoperator $D(\sigma_z\alpha)$ aus.

b) Nehmen wir an, dass am Zeitpunkt $t = 0$ das System durch eine faktorisierte Dichtematrix dargestellt wird, $\hat{\rho}(0) = \hat{\rho}^s \otimes \hat{\rho}^a$. Hier ist $\hat{\rho}^s$ die Dichtematrix des Spins mit Elementen $\rho^s_{\sigma\sigma'}$, und $\hat{\rho}^a$ die Dichtematrix des Strahlungsfeldes. Wir nehmen weiter an, dass das Strahlungsfeld im Grundzustand ist: $\hat{\rho}_a = |0\rangle\langle 0|$. Benutzen Sie den Zeitentwicklungs-Operator von Aufgabenteil a) und spuren sie über das Strahlungsfeld, um die zeitabhängige reduzierte Dichtematrix zu bekommen:

$$\hat{\rho}^{\text{red}}(t) = \text{Tr}_a(\hat{\rho}(t)) = \text{Tr}_a(U(t)\hat{\rho}_0 U^\dagger(t)) \tag{2}$$

wobei $\text{Tr}_a(\ldots) = \sum_n \langle n|\ldots|n\rangle$. Zeigen Sie dass die diagonalen Elemente, $\rho^{\text{red}}_{\sigma\sigma}$, (die Wahrscheinlichkeiten) der reduzierten Dichtematrix für Zeiten $t > 0$ erhalten bleiben, d.h. $\rho^{\text{red}}_{\sigma\sigma}(t) = \rho^s_{\sigma\sigma}$, und dass die nicht-diagonalen Elemente (Kohärenzen) wie folgt modifiziert werden

$$\rho^{\text{red}}_{+-}(t) = e^{-i\omega_0 t} e^{-\gamma(t)} \rho^s_{+-} \tag{3}$$

mit $\gamma(t) = (2g/\omega)^2(1 - \cos\omega t)$. Wie verändert der Vorfaktor $e^{-\gamma(t)}$ die Kohärenzen für $t \ll 2\pi/\omega$, und wie für $t = 2\pi/\omega$?

c) Die Berechnung für viele Moden verläuft analog und ergibt für die Kohärenzen

$$\rho^{\text{red}}_{+-}(t) = e^{-i\omega_0 t} e^{-\sum_k \gamma_k(t)} \hat{\rho}^s_{+-} \tag{4}$$

wobei die $\gamma_k(t)$ dieselbe Form haben wie $\gamma(t)$ aber mit $g \to g_k$ und $\omega \to \omega_k$. Um ein Gefühl dafür zu bekommen was passiert, analysieren Sie erst den Fall von zwei Moden $k = 1, 2$ mit $\omega_1 \neq \omega_2$. Definieren Sie danach $J(\omega)$:

$$J(\omega) = 2\pi \sum_k g_k^2 \delta(\omega - \omega_k) \tag{5}$$

und Zeigen Sie durch die Substitution $x = \omega t$ das für lange Zeiten die Kohärenzen eine exponentielle Abhängigkeit von t bekommen:

$$\hat{\rho}^{\text{red}}_{+-}(t) = e^{-\Gamma t}\hat{\rho}^s_{+-}, \qquad \Gamma = J(0) \tag{6}$$

Hierfür brauchen Sie das Integral $\int_0^\infty dx(1 - \cos x)/x^2 = \pi/2$.

Bitte wenden ...

30 **Lorentz-Gruppe.** Wir definieren den Vierervektor $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ mit $x^0 = ct$ (das Zeitelement) und $(x^1, x^2, x^3) = \boldsymbol{x}$ (die Raumelemente). Die Transformationen $x^\mu \mapsto x^{\mu\prime} = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$, unter denen das Skalarprodukt $x^\mu x_\mu = x^\mu g_{\mu\nu} x^\nu = (ct)^2 - |\boldsymbol{x}|^2$ invariant bleibt, sind Elemente der homogenen Lorentz-Gruppe. Hier haben wir die Minkowski-Raum-Zeit-Metrik $g = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$. Diese Beschränkung bedeutet für die Transformationen dass sie die Eigenschaften

$$\Lambda^\mu{}_\rho g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\sigma = g_{\rho\sigma} \qquad (\Lambda^T g \Lambda = g) \tag{7}$$

haben. Aus Gl. (7) zusammen mit $\det g = -1$ können wir schliessen, dass $\det \Lambda = \pm 1$. In der Gruppe von Matrizen die diese Eigenschaften haben, befindet sich eine Untergruppe für die Zusätzlich gilt, dass $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ und $\det\Lambda = 1$.

a) Betrachten Sie die Transformationen mit $\Lambda^0{}_i = \Lambda^i{}_0 = 0$, $i = 1, 2, 3$, und $\Lambda^0{}_0 = 1$, d.h. Transformationen die nur die Ortsvariablen beeinflussen. Ein einfaches Beispiel für so eine Transformation ist gegeben durch:

$$\Lambda = R_3 : \begin{array}{l} x^1 \mapsto x^{1\prime} = a x^1 + b x^2 \\ x^2 \mapsto x^{2\prime} = d x^2 + c x^1 \end{array} \tag{8}$$

mit den anderen Variablen unverändert. Schreiben Sie die Transformation in Matrixform auf. Welche Beschränkungen auf den konstanten $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ führen die Einschränkungen $R_3^T g R_3 = g$ und $\det R_3 = 1$ mit sich? Zeigen Sie, dass die Konstanten parametrisiert werden können durch $a = d = \cos\theta$ und $b = -c = \sin\theta$. Überzeugen Sie sich auch dass die Transformation R_3 eine Rotation der Ortsvariablen durch einen winkel θ um die x_3-Achse entspricht.

b) Betrachten Sie nun die Transformationen für die $\Lambda^0{}_i \neq 0$. Betrachten wir besonders:

$$\Lambda = L_1 : \begin{array}{l} x^0 \mapsto x^{0\prime} = a x^0 + b x^1 \\ x^1 \mapsto x^{1\prime} = d x^1 + c x^0, \end{array} \tag{9}$$

mit den anderen Variablen unverändert. Schreiben Sie die Transformation in Matrixform auf. Welche Beschränkungen auf den konstanten $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ führen die Beschränkungen $L_1^T g L_1 = g$, $\det L_1 = 1$ und $(L_1)^0{}_0 \geq 1$ mit sich? Zeigen Sie, dass die Konstanten parametrisiert werden können durch $a = d = \cosh\eta$ und $b = c = -\sinh\eta$. Überzeugen Sie sich auch, dass mit $\tanh\eta = \beta = v/c$ die Transformation L_1 einen Lorentz-Boost entlang der x_1-Achse mit der relativen Geschwindigkeit v entspricht.

31 **Klassisches geladenes Teilchen in einem EM-Feld.** Wir definieren das Eigenzeitelement $d\tau = dt\sqrt{1 - \beta^2}$, mit $\beta = v/c$ wobei $v = |\boldsymbol{v}|$. Wir können dann eine klassische Hamilton-Funktion für das geladene Teilchen im EM-Feld aufschreiben:

$$H = \frac{1}{2m}(P^\mu - \frac{q}{c}A^\mu)(P_\mu - \frac{q}{c}A_\mu) + \frac{1}{2}mc^2 \tag{10}$$

wobei $A^\mu = (\Phi, \boldsymbol{A})$ das Viererpotential des EM-Feldes, und $P^\mu = P^\mu(\tau)$ der Viererimpuls ist. Die Vierergeschwindigkeit finden wir von der Hamilton-Gleichung:

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \{H, x^\mu\}_{P.B.} = \frac{1}{m}(P^\mu - \frac{q}{c}A^\mu), \qquad \text{mit dem Poisson-Bracket } \{A, B\}_{P.B.} = \frac{\partial A}{\partial P_\mu}\frac{\partial B}{\partial x^\mu} - \frac{\partial B}{\partial P_\mu}\frac{\partial A}{\partial x^\mu} \tag{11}$$

Zeigen Sie, dass die Bewegunglsgleichung für U^μ auf die folgende Form gebracht werden kann

$$\frac{dU^\mu}{d\tau} = \{H, U^\mu\}_{P.B.} \Longrightarrow m\frac{dU^\mu}{d\tau} = \frac{q}{c}F^{\mu\nu}U_\nu, \quad F^{\mu\nu} = F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{12}$$

Schreiben Sie die Gleichung für $U^i,\ i = 1, 2, 3$, einzeln auf, und bilden Sie den Limes $\beta \to 0$ und bestätigen Sie, dass dies die bekannte Form der Bewegungsgleichung für ein Teilchen im EM-Feld gibt.